Introduzione alle funzioni

F. Tarini - Università di Pisa - Scienze per la Pace

Questi appunti introducono alcuni elementi di analisi matematica, considerandoli quali strumenti concettuali di base. Si inizia con la nozione di funzione reale di una variabile reale, sia come espressione algebrica che come grafico cartesiano. Segue una rassegna delle principali famiglie di funzioni elementari, che esplicita i loro andamenti in dipendenza dai parametri e fa riferimento ad alcune situazioni concrete che esse descrivono. Infine sono introdotte le derivate come indicatori dell'andamento locale di una funzione e l'integrale per la misura dei suoi effetti cumulativi.

I. Le Funzioni

Premessa: le relazioni

Chiamiamo *relazione* una legge di corrispondenza che lega elementi di un insieme di partenza, A, ad elementi di un insieme di arrivo, B. Gli insiemi A e B possono essere due insiemi diversi, o eventualmente anche lo stesso insieme.

Ad esempio, si può definire una relazione *mamma*, che fa corrispondere ad ogni persona la sua mamma. In questa relazione, l'insieme di partenza è l'insieme di tutte le persone, e anche l'insieme di arrivo è un insieme di persone, ma evidentemente non di tutte, solo di donne con figli. Una relazione è composta di coppie ordinate, di cui il primo elemento appartiene all'insieme di partenza e il secondo elemento appartiene all'insieme di arrivo. La tabella seguente riporta alcuni componenti di questa relazione (supponiamo che ogni nome identifichi una determinata persona, senza omonimie).

persona	*mamma*
Antonio	Giulia
Monica	Anna
Gino	Anna
Luca	Anna
Michela	Lucia
Maria	Lucia

Si può definire anche una relazione *figlio*, che rappresenta un possibile inverso della relazione precedente e fa corrispondere ad ogni mamma un suo figlio. La tabella seguente è riferita alla stesse persone sopra:

persona	*figlio*
Giulia	Antonio
Anna	Monica
Anna	Gino
Anna	Luca
Lucia	Michela
Lucia	Maria

Questa tabella si può scrivere anche nel modo seguente:

persona	*figlio*	*figlio*	*figlio*
Giulia	antonio		
Anna	Monica	Gino	Luca
Lucia	Michela	Maria	

ovvero con più di due colonne, per mettere in evidenza che una mamma può avere più figli.

Altro esempio: si può definire una relazione p, "peso di una persona" che ad ogni persona associa il suo peso. In questo caso, l'insieme di partenza è l'insieme di tutte le persone, l'insieme di arrivo è un insieme dei numeri. La tabella seguente riporta alcuni componenti di *peso* di persone.

persona	*peso (Kg)*
Antonio	62
Monica	52
Gino	70
Luca	62
Michela	45
Maria	55

Le funzioni come relazioni univoche

Chiamiamo *funzione* una relazione *univoca*, nel senso che ad ogni elemento dell'insieme di partenza corrisponde al più un solo elemento dell'insieme di arrivo. Dei tre esempi di relazione fatti sopra, il primo ("mamma") e il terzo ("peso") sono funzioni, mentre il secondo ("figlio") non lo è. Infatti mentre "di mamme ce n'è una sola"[1], una mamma può avere più figli (come è messo in evidenza nel secondo tipo di tabella usata sopra), quindi la relazione "figlio" non è una funzione, come non sono funzioni tutte le relazioni esprimibili sotto forma di tabella con più di due colonne.

L'elemento di partenza di una funzione è detto *argomento* della funzione, l'elemento di arrivo è il suo *valore*. L'insieme di tutti gli argomenti di una funzione è il suo *dominio*, l'insieme di tutti i suoi valori è il suo *codominio*. Il dominio della funzione "mamma" è il genere umano intero (tutti sono nati da una mamma), il suo codominio è l'insieme delle donne che hanno avuto figli. Anche la funzione p, "peso di una persona", ha per dominio il genere umano, mentre il suo codominio è un insieme di numeri positivi.

Nella notazione matematica, l'argomento di una funzione viene indicato tra parentesi e il valore corrispondente viene scritto dopo un segno di uguaglianza. Quindi la scrittura: *mamma(Antonio) = Giulia* significa che la funzione mamma, applicata ad Antonio, fornisce come valore Giulia, ovvero *vale* Giulia; allo stesso modo, la scrittura: *peso(Antonio) = 62* significa che la funzione peso, applicata ad Antonio, vale 62. In termini più semplici: la mamma di Antonio è Giulia, il peso di Antonio è 62.

[1] Usiamo questa frase nel senso inoppugnabile che aveva fino a pochi anni fa . . .

Si dice che una funzione agisce su una *variabile indipendente* e fornisce il valore della *variabile dipendente.*

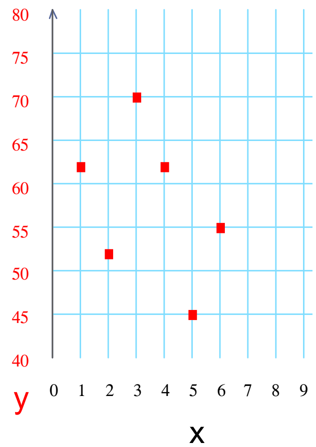
Una categoria particolare di funzioni è quella in cui sia la variabile indipendente che quella dipendente sono numeri interi. In realtà questa categoria è molto estesa, infatti sotto questa forma possono esprimersi tutte le funzioni definite per elencazione, come negli esempi visti sopra. Per convincersi di questo, basta porre in un elenco ordinato tutti i possibili argomenti e valori e usare al posto di ciascuno di loro il suo numero d'ordine. Ad esempio, per la funzione *peso* dell'esempio sopra si possono enumerare le persone così:

n. ord.	*persona*
1	Antonio
2	Monica
3	Gino
4	Luca
5	Michela
6	Maria

e poi riscrivere la funzione peso così:

persona	*peso (Kg)*
1	62
2	52
3	70
4	62
5	45
6	55

Le funzioni numeriche si prestano meglio ad una rappresentazione grafica o *grafico*, che evidenzia nel piano cartesiano[2] i punti la cui ascissa è un argomento della funzione e la cui ordinata è il corrispondente valore. Ad esempio, la funzione descritta dalla tabella qui sopra darebbe luogo al grafico seguente.



Nel grafico di una funzione, la condizione di univocità si traduce nel fatto che ogni retta verticale contiene al più un punto che appartiene al grafico stesso.

Per alcune funzioni numeriche, è possibile specificare la legge di corrispondenza mediante una o più espressioni generali, anziché con una tabella o un'elencazione di coppie. In questi casi, come troviamo nei libri di matematica, scriveremo una funzione tramite la sua cosiddetta *espressione algebrica*, come negli esempi seguenti.

La scrittura:

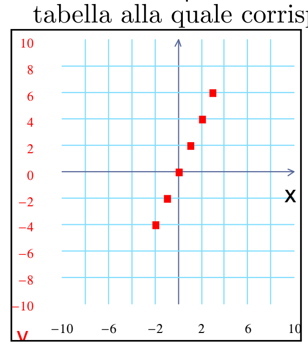
- $f(x) = 2 \cdot x$

significa che f è una funzione che ad ogni numero, indicato genericamente con x, fa corrispondere il doppio del numero stesso, indicato con $2 \cdot x$. Il segno $\cdot$ indica la moltiplicazione e ogni volta che non ci sarà pericolo di fraintesi verrà omesso, scrivendo quindi la stessa funzione così: $f(x) = 2x$.

Questa scrittura stabilisce in modo sintetico la legge di corrispondenza tra argomento e valore; da essa è facile ricavare ad esempio i casi particolari elencati nella seguente tabella:

argomento	*valore*
0	0
1	2
2	4
3	6
-1	-2
-2	-4

tabella alla quale corrisponde il grafico seguente:



Si noti che in questo esempio i punti hanno una disposizione regolare (sono tutti allineati), in forza della legge generale che li identifica.

Altro esempio: la scrittura:

- $f(x) = 3 \cdot x^2 + 5$

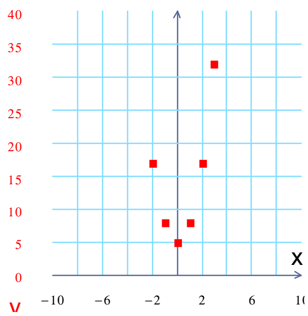
[2]Per chi non lo ricordasse, accenniamo come si costruisce un *piano cartesiano.* Si chiama *retta reale o retta numerica* una retta in cui ogni punto è associato a un numero reale. Per fare questo, si sceglie un qualsiasi punto della retta, e lo si associa al numero zero; questo punto assume il nome di *origine*. Poi si sceglie un'unità di misura di lunghezza, si associa al numero uno il punto a destra dell'origine che ha da essa distanza unitaria, e si associa al numero meno uno il punto a sinistra dell'origine che ha da essa distanza unitaria; e cosí via per tutti gli altri numeri, positivi e negativi. In altre parole, ogni punto della retta reale è associato al numero che indica la sua distanza dall'origine, prendendo come positive le distanze verso destra e negative quelle verso sinistra; il *piano cartesiano* è un piano in cui sono tracciate due rette reali, solitamente una in orizzontale e una in verticale, perpendicolari tra loro. Quella orizzontale prende il nome di *asse delle ascisse*, e si indica spesso con la lettera x, l'altra di *asse delle ordinate* o retta y. Tracciando da ogni punto del piano cartesiano la perpandicolare ad ogni asse, il punto stesso resta individuato dai due valori intercettati sugli assi, valori detti appunto coordinate del punto, distinte in *ascissa* e *ordinata*. I due assi dividono il piano cartesiano in quattro settori, che si chiamano *quadranti*, e più esattamente si chiamano 1°, 2°, 3°e 4°quadrante, partendo da quello con ascisse e ordinate positive (quello in alto a destra) e procedendo in senso antiorario.

significa che f è una funzione che ad ogni numero fa corrispondere il triplo del suo quadrato più cinque.

Da questa scrittura è facile ricavare ad esempio i casi particolari elencati nella seguente tabella:

x	$f(x)$
0	5
1	8
2	17
3	32
-1	8
-2	17

tabella alla quale corrisponde il grafico nella figura seguente



Anche in questo caso si possono notare alcune regolarità, seppure diverse dal caso precedente, ad esempio una certa simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

Considerando che un punto del piano cartesiano è individuato da una coppia di numeri (ascissa, ordinata), si può vedere una funzione come insieme di coppie di numeri ordinate.

Di solito le quantità in gioco sono numeri non solo interi ma anche reali, ovvero con parte frazionaria. Ad esempio, un pieno di benzina normalmente non sarà di un numero intero di litri. L'analisi matematica e il seguito di questi appunti parlano quindi di funzioni in cui sia la variabile indipendente che quella dipendente sono numeri reali, ovvero di funzioni che hanno sia dominio che codominio nell'insieme dei numeri reali; queste sono dette propriamente *funzioni reali di una variabile reale.* Qundo non ci sono ambiguità, e nel seguito di questi appunti, sono dette semplicemente *funzioni.*

In un piano cartesiano, anche una funzione reale è rappresentata da un grafico, inteso come l'insieme dei punti del piano che hanno per ascissa l'argomento della funzione e per ordinata il suo valore, ma questi punti tipicamente non sono staccati tra loro, come negli esempi sopra, ma nel loro insieme formano una linea nel piano; l'andamento di questa linea fornisce un'informazione visiva sintetica dell'andamento della funzione, spesso più efficace dell'espressione algebrica e di tante tabelle numeriche. Il grafico nel piano cartesiano e l'espressione algebrica come due rappresentazioni diverse della stessa funzione. Naturalmente ogni rappresentazione fisica del grafico sarà limitata ad una parte finita del piano cartesiano, che di per sé è illimitato.

Un modo rudimentale per costruire il grafico di una funzione reale è di ricavare prima alcuni suoi punti, cioè calcolare per un'arbitraria serie di valori dell'ascissa (variabile indipendente) i corrispondenti valori dell'ordinata (variabile dipendente), ricavando tabelle di argomento/valore come quelle degli esempi sopra e segnando nel piano cartesiano i punti ricavati. Per alcune funzioni semplici, se i punti sono stati scelti in modo abbastanza accurato, basta poi congiungere i punti segnati per ottenere il grafico, seppure approssimato, e limitato ad una parte del piano. Questo si può fare a mano, naturalmente per un numero di punti assai ridotto; si può fare anche al computer, ad esempio con alcuni specifici programmi di tipo matematico (ce ne sono dai più semplici ai più complessi e completi)[3] oppure con generico programma di gestione di fogli di calcolo elettronico, in cui questo servizio si affianca ai tanti offerti da questi programmi. Utilizzando il computer, si possono trattare molti valori e ottenere rapidamente molte informazioni sull'andamento delle funzioni. Informazioni sull'andamento locale di una funzione e sui suoi effetti cumulativi si ottengono dal calcolo di derivate e integrali, introdotto nell'ultima parte di questi appunti.

Le funzioni elementari

Si chiamano funzioni elementari quelle definite con una espressione algebrica contenente i quattro operatori aritmetici, le potenze (comprese le radici) e gli operatori di logaritmo e trigonometrici (che sono richiamati più avanti). Si noti che funzione elementare non significa funzione semplice o funzione facile, ma significa che è scritta coi soli operatori suddetti e con un'unica espressione algebrica per tutto il suo campo di definizione. Invece, una funzione che sia definita con operatori diversi da questi o mediante espressioni diverse riferite a diversi insiemi di valori di x non è una funzione elementare. Ad esempio, la funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$, definita come la parte intera di x, non è una funzione elementare. Casi particolari: la funzione $y = \mathit{segno}(x)$, che vale 1 per ogni x positivo e -1 per ogni x negativo (e non è definita per $x = 0$) e la funzione $y = |x|$ (valore assoluto di x), che vale x per ogni x positivo e $-x$ per ogni x negativo a rigore non sarebbero funzioni elementari, tuttavia solitamente sono intese come scrittura abbreviata rispettivamente della funzione elementare $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ e della $\sqrt{x^2}$.

II. Famiglie di funzioni elementari

Le pagine seguenti passano in rassegna le principali famiglie di funzioni elementari, proponendo la loro espressione algebrica, il loro grafico cartesiano e il loro andamento in relazione agli eventuali parametri; per ciascuna famiglia, si citano situazioni concrete alle quali possono essere applicate.

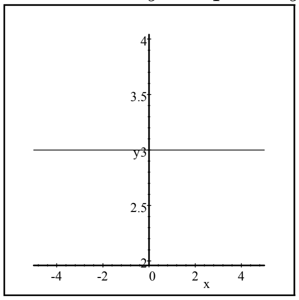
A. *Funzioni costanti*

Una funzione costante assume sempre lo stesso valore per qualsiasi valore dell'argomento. Ad esempio, la funzione:

$$f(x) = 3$$

[3]In classe usiamo il programma MathScribe, semplicissimo e gratuito, ogni studente può scaricarsene una copia anche dal sito del corso, se vuole.

ha valore 3 in corrispondenza a qualunque valore della variabile x. Il suo grafico è una retta parallela all'asse x, che intercetta l'asse y nel punto $y = 3$:



$f(x) = 3$

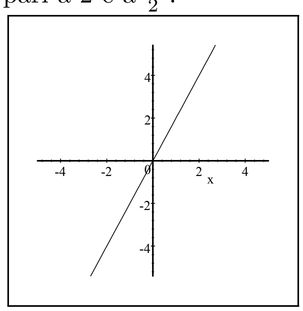
Allo stesso modo, naturalmente, il grafico di ogni altra funzione costante $f(x) = k$, con k numero reale arbitrario, è una retta parallela all'asse x, che intercetta l'asse y nel punto $y = k$. Hanno andamento costante, ad esempio, il costo di una corsa in taxi rispetto al numero di passeggeri (limitatamente alla capienza, naturalmente), o l'accelerazione con cui vediamo cadere un oggetto pesante, rispetto al suo peso, o l'altezza a cui è appeso un quadro, rispetto al tempo trascorso.

B. Funzioni lineari o proporzionalità diretta

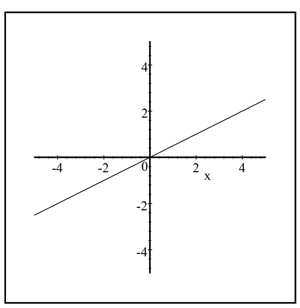
Le più semplici funzioni non costanti sono le funzioni lineari, che hanno la forma:

$f(x) = mx.$

Il loro grafico è una retta che passa per l'origine. Il fattore di proporzionalità, m, è detto *coefficiente angolare* della retta e ne determina la *pendenza*, cioè di quanto la retta è inclinata, come è mostrato dalla differenza tra il grafico sopra e i seguenti, che hanno m rispettivamente pari a 2 e a $\frac{1}{2}$:



$f(x) = 2x$



$f(x) = \frac{1}{2}x$

Per valori di m positivi, la retta è crescente, ovvero "va in salita" (supponendo di procedere da sinistra verso destra), per valori di m negativi, la retta è decrescente, ovvero "va in discesa". Più precisamente, m è la tangente trigonometrica[4] dell'angolo tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Le funzioni lineari rappresentano situazioni in cui una grandezza è direttamente proporzionale ad un'altra, come ad esempio il costo di una busta di frutta, costo pari al peso moltiplicato il prezzo al chilo, oppure il costo di un pieno di benzina, dato dal prezzo al litro per il numero di litri.

[4]Le funzioni trigonometriche sono richiamate più avanti

Le funzioni lineari hanno le seguenti comode proprietà: per ogni coppia di argomenti, a e b e per ogni parametro k è sempre vero che:

$f(a + b) = f(a) + f(b)$ (si dice: "f è additiva")

$f(ka) = kf(a)$ (si dice: "f è omogenea").

Viceversa, ogni funzione additiva e omogenea è necessariamente una funzione lineare.

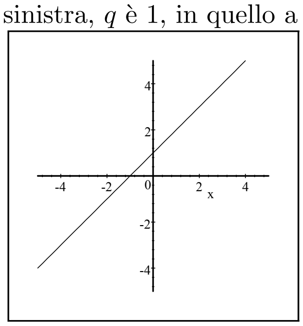
C. Funzioni lineari affini

Le funzioni lineari sono un caso particolare di funzioni lineari affini, che hanno la forma:

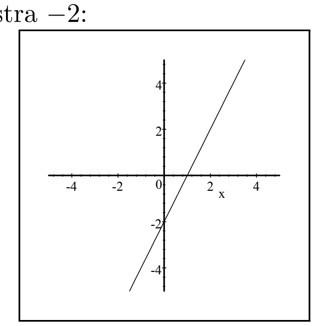
$f(x) = mx + q$

ed hanno per grafico ancora una retta, ma che non passa per l'origine (tranne quando q sia appunto zero, e quindi rientra nel caso precedente).

Anche nelle funzioni lineari affini, il parametro m indica la pendenza, proprio come per le funzioni lineari. Inoltre, il parametro q determina il valore della funzione per $x = 0$, cioè a quale altezza il suo grafico intercetta l'asse delle ordinate, come si vede nei grafici seguenti. Nel grafico a sinistra, q è 1, in quello a destra -2:



$f(x) = x + 1$



$f(x) = 2x - 2$

In tutto, quindi:

- tenendo fisso q e variando m, cambia l'inclinazione della retta;
- invece, a parità di m e variando q la retta si sposta in verticale, restando parallela a se stessa.

Le funzioni lineari affini rappresentano ad esempio situazioni in cui un costo aumenta in proporzione a una certa quantità, ma con un costo fisso aggiuntivo; ad esempio, la bolletta della luce costa in proporzione ai KWh consumati, più un costo fisso che non dipende dal consumo, ma va per il noleggio del contatore, per la bolletta, ecc.

Nell'accezione comune, le funzioni lineari affini vengono spesso chiamate semplicemente lineari, ma in realtà non sono né additive né omogenee.

C.1 Rapporto tra funzioni ed equazioni e tra funzioni e sistemi di equazioni. Caso delle funzioni lineari e lineari affini.

Un'equazione a un'incognita è un'espressione algebrica che ha una forma standard del tipo: $f(x) = 0$. Nella funzione f, compare la variabile x (detta incognita) e compaiono alcuni valori, che possono essere numeri o parametri. Risolvere un'equazione significa trovare qualche valore che sostituito all'incognita renda vera l'uguaglianza. Questi valori si chiamano *radici* dell'equazione. Quindi risolvere l'equazione significa in pratica trovare il valore o i valori della variabile indipendente per i quali il valore della funzione corrispondente è uguale a zero, ovvero trovare per quali valori di x il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse. Questi punti sono detti i *punti di zero* (o semplicemente *gli zeri o radici*) della funzione.

Esaminando il grafico della funzione in un certo intervallo, in molti casi si può capire se in quell'intevallo essa incontra l'asse delle ascisse, e quante volte, ovvero se ha punti di zero e quanti. Si capisce quindi se l'equazione ammette soluzioni (e quante) in quell'intervallo.

Qualche esempio per chiarire questo discorso, cominciando dalle funzioni lineari affini, che corrispondono alle equazioni di primo grado[5]. Consideriamo il famoso indovinello: "un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa un mattone?" La domanda si può riscrivere, in modo formale, o simbolico, nel modo seguente, indicando con x il peso del mattone:

$x = 1 + \frac{1}{2}x$.

Questa è un'equazione di primo grado[6]. Per portarla alla sua forma standard, sottraiamo da entrambi i membri la quantità che appare al secondo membro, cioè $1 + \frac{1}{2}x$, e ottieniamo:

$x - (1 + \frac{1}{2}x) = 1 + \frac{1}{2}x - (1 + \frac{1}{2}x)$, cioè:
$\frac{1}{2}x - 1 = 0$

che ha soluzione $x = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Si noti che il procedimento qui esemplificato può essere usato sempre per portare un'equazione di primo grado alla forma generale $ax + b = 0$, al fine di ricavarne la soluzione con la nota formula standard[7]. Ma risolvere l'equazione equivale a trovare un punto di zero della corrispondente funzione (che in questo caso è lineare affine):

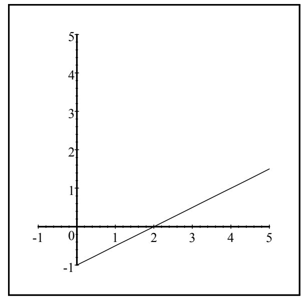
$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$,

cioè un punto in cui il suo grafico incontra l'asse delle ascisse. Questo incontro avviene in tutti i casi (cioè per ogni valore dei parametri), tranne quando la retta sia parallela all'asse delle ascisse, cioè tranne in caso che sia $m = 0$, caso in cui occorre ulteriormente distinguere: se $q = 0$, la retta concide con l'asse x, quindi l'equazione risulta indeterminata; se invece $q \neq 0$, non lo tocca in nessun punto e quindi l'equazione risulta impossibile. Nel caso in esempio, dal grafico si vede che la retta incontra l'asse delle ascisse circa nel punto $x = 2$.

[5]Per chi non ha alcun nostalgico ricordo: un'equazione di primo grado ha la forma generale $ax + b = 0$. x è l'incognita e a e b sono i coefficienti dell'equazione. Se $a \neq 0$, esiste un'unica radice, data da $x = -\frac{b}{a}$. Se invece a è zero, l'equazione diventa $0x + b = 0$. Se $b \neq 0$, questa uguaglianza è sempre falsa e quindi l'equazione non ha radici e si dice che è *impossibile*; se invece anche b è zero, l'uguaglianza è sempre vera e quindi qualunque numero è radice dell'equazione, che quindi si dice *indeterminata*.

[6]Si noti che saper trascrivere un problema formulato a parole in una equazione è almeno altrettanto importante che saper risolvere le equazioni; quindi questo corso, non potendo fornire metodi generali, si limita a proporre casi in cui esercitare questa capacità.

[7]Basta pensare ai piatti di una bilancia: se sono in equilibrio, aggiungendo o sottraendo lo stesso peso da entrambi, l'equilibrio rimane, ovvero l'uguaglianza continua a valere e la soluzione dell'equazione resta la stessa. Lo stesso vale se invece di aggiungere e sottrarre si moltiplica o divide per uno stesso numero (evitando la zero, naturalmente).



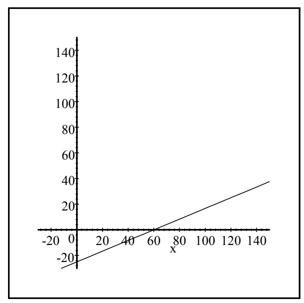
$y = \frac{1}{2}x - 1$

Altro esempio: l'indicatore della benzina della mia macchina segna un terzo. Se aggiungo 25 litri, arriva a tre quarti. Che capacità ha il serbatoio?

Indicando con x la capacità totale del serbatoio, il discorso si può tradurre in:

$\frac{1}{3}x + 25 = \frac{3}{4}x$, da cui l'equazione:
$\frac{5}{12}x - 25 = 0$. Che fornisce la radice $x = 60$.

Di nuovo, risolvere l'equazione equivale a trovare lo "zero" della funzione: $f(x) = \frac{5}{12}x - 25$, "zero" che esiste sicuramente, dato che è $m \neq 0$. Anche dal grafico si vede che la retta incontra l'asse delle ascisse circa nel punto $x = 60$.



$y = \frac{5}{12}x - 25$

C.2 Sistemi di equazioni lineari

Risolvere un sistema di due equazioni in due incognite significa trovare valori che sostituiti alle incognite soddisfino entrambe le equazioni contemporaneamente. Interpretando ogni equazione come una funzione in cui una delle due incognite compaia come variabile indipendente e l'altra come variabile dipendente, risolvere il sistema si-gnifica trovare i valori delle incognite per i quali i grafici delle due corrispondenti funzioni si incontrano. Quindi dai grafici si può capire se il sistema ammette soluzioni (e quante) e anche ricavare il loro valore approssimativo. Esempio:

L'età di Bice oggi è 2/3 di quella di Aldo, ma sei anni fa era la metà. Quanti anni hanno? Indicando con a e b le due età, si avrà il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite a e b:

$$\begin{cases} b = \frac{2}{3} \cdot a \\ b - 6 = \frac{1}{2}(a - 6) \end{cases}$$

Il sistema si risolve ad esempio per sostituzione, sostituendo nella seconda equazione il valore $\frac{2}{3}a$ al posto di b:

$$\begin{cases} b = \frac{2}{3} \cdot a \\ \frac{2}{3}a - 6 = \frac{1}{2}(a - 6) \end{cases}, \text{ da cui}$$

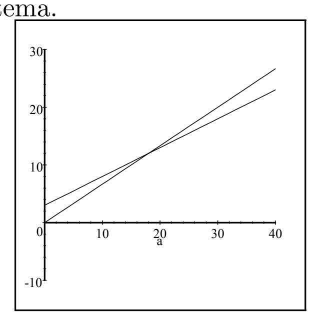
$$\begin{cases} b = \frac{2}{3} \cdot a \\ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) a = 6 - 3 \end{cases}, \text{ da cui}$$

$$\begin{cases} b = \frac{2}{3} \cdot a \\ \frac{1}{6}a = 3 \end{cases}, \qquad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} b = \frac{2}{3} \cdot a = 12 \\ a = 18 \end{cases}.$$

Le due equazioni iniziali, scegliendo ad esempio b come variabile dipendente, corrispondono alle due funzioni:

$b = \frac{2}{3}a$ e $b = \frac{1}{2}a + 3$, che come si vede dal loro grafico si incontrano approssimativamente nel punto $(18, 12)$, punto che ha come coordinate le soluzioni del sistema.

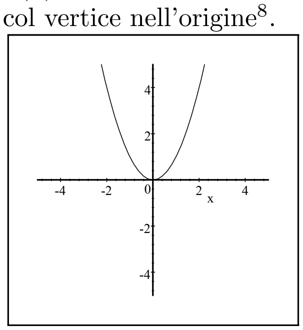


$b = \frac{2}{3}a$, $b = \frac{1}{2}a + 3$

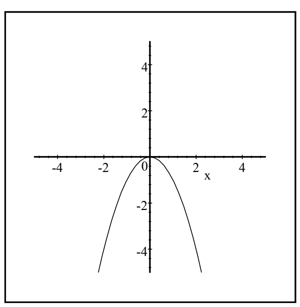
Ogni sistema di due equazioni lineari ammette soluzione univoca, tranne il caso che le due rette corrispondenti siano parallele; in tal caso, se le due rette parallele sono coincidenti il sistema risulta indeterminato, altrimenti risulta impossibile.

D. Proporzionalità quadratica

Si parla di proporzionalità quadratica quando il risultato non varia secondo il valore della variabile dipendente, bensì secondo tale valore elevato a esponente due. Le funzioni più semplici di questa famiglia hanno la della forma algebrica: $f(x) = ax^2$ ed il loro grafico ha la forma di una *parabola* col vertice nell'origine[8].



$y = ax^2$, *con* $a = 1$



$y = ax^2$, *con* $a = -1$

Ad esempio, l'area di un quadrato di lato l è l^2, cioè è data da lato per lato, ovvero lato elevato alla seconda (e non a caso si dice "elevare al quadrato" per dire "elevare a esponente due"); e così pure l'area del triangolo equilatero di lato l è $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, mentre l'area del cerchio di raggio r è πr^2. Anche in Fisica si trovano situazioni di proporzionalità quadratica, ad esempio l'energia cinetica di un corpo in movimento dipende dal (di dice anche *va col*) quadrato della velocità[9]. Anche lo spazio percorso ad accelerazione costante (ad esempio da un grave in caduta libera partendo da fermo) è proporzionale al quadrato del tempo trascorso.

D.1 Significato del parametro a

Ricavando il grafico da una tabella di valori (o meglio, come al solito, al computer) si vede che

• se $a > 0$, la parabola è "rivolta verso l'alto", come nel grafico sopra a sinistra. Funzioni di questo tipo si dicono *convesse*, intendendo con questo che la zona di piano che rimane *sopra* al loro grafico è una figura convessa[10].
• se $a < 0$, la parabola è "rivolta verso il basso", come nel grafico a destra. Funzioni di questo tipo si dicono *concave*. Ogni funzione quadratica è concava o convessa in tutto il suo dominio, ma funzioni meno semplici possono avere diversa convessità in diversi intervalli; si dice *punto di flesso* un punto in cui una funzione cambia convessità, ovvero è convessa a sinistra di quel punto e concava alla sua destra, o viceversa;
• scegliendo valori diversi per il parametro a, con valori di a grandi in valore assoluto (valori lontani da zero), la parabola è stretta, per valori piccoli in valore assoluto (valori vicini a zero) è larga;
• se $a = 0$, la parabola degenera in una retta, che coincide con l'asse delle ascisse.

D.2 Parabole di forma più generale

Le funzioni quadratiche più in generale hanno la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\ .$$

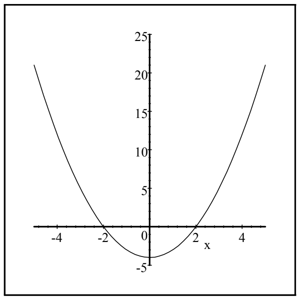
In questa forma, i parametri a, b e c hanno i significati seguenti.

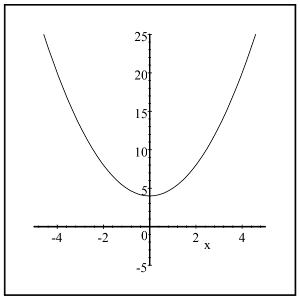
• Il significato del parametro a è quello visto nel caso particolare di sopra, cioè di rendere la parabola convessa ($a > 0$) o concava ($a < 0$) e più larga (parametro a piccolo in valore assoluto) o più stretta (a grande). Per $a = 0$, la parabola degenera in una retta della forma $f(x) = bx + c$.
• Il ruolo del parametro c è identico al ruolo del termine q nelle funzioni lineari affini, cioè la parabola passa per l'origine quando c è zero e in generale intercetta l'asse y nel punto $y = c$. Resta da vedere il parametro b, per il quale si hanno diversi casi:
Se $b = 0$, la parabola è simmetrica rispetto all'asse y, come notato per il caso particolare sopra, eventualmente spostata verso l'alto o verso il basso a seconda di c, come evidenziato dai seguenti due grafici:

[8] Dal punto di vista geometrico, una parabola è costituita dai punti che sono equidistanti da una data retta, detta direttrice, e da un dato punto, detto fuoco. Per la parabola della funzione $y = ax^2$ la direttrice è la retta orizzontale $y = -\frac{1}{4a}$, il fuoco è il punto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, cioè il punto con ascissa zero e ordinata $\frac{1}{4a}$. L'asse delle ordinate è asse di simmetria per la parabola.

[9] Questo è il motivo per cui la velocità elevata è molto più pericolosa di quanto il nostro istinto non suggerisca: a velocità doppia o tripla, l'energia da smaltire con una frenata o che si scarica sulla violenza dell'urto non è il doppio o il triplo, ma quatto volte o nove volte tanto, rispettivamente. E così pure gli spazi di frenata. Quindi aumentano in modo quadratico sia le probabilità di incidente che i danni conseguenti.

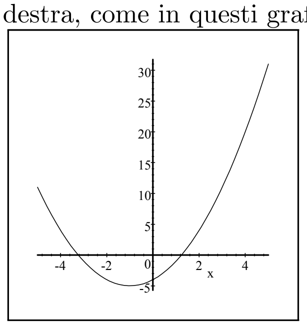
[10] Dalla geometria elementare: si chiama convessa una figura che contiene totalmente ogni segmento che unisce due suoi punti qualsiasi. Altrimenti si dice concava.

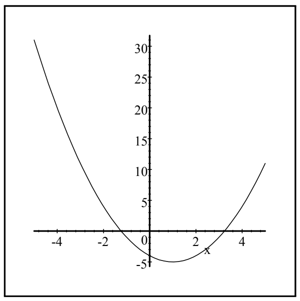




$f(x) = x^2 - 4$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + 4$

Per $b > 0$, la parabola risulta spostata verso sinistra e in parte verso il basso, mantenendo fermo il suo punto di incontro con l'asse y, e analogamente, se $b < 0$, verso destra, come in questi grafici:





$f(x) = x^2 + 2x - 4$ $\qquad$ $f(x) = x^2 - 2x - 4$

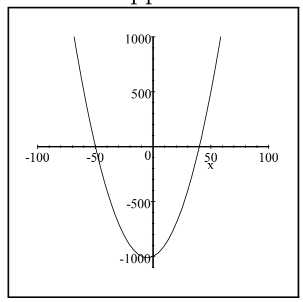
In generale, al variare di b il vertice della parabola percorre una parabola speculare, che corrisponde alla funzione $f(x) = -ax^2 + c$.

D.3 Rapporto tra funzioni ed equazioni e tra funzioni e sistemi di equazioni. Caso delle funzioni quadratiche.

Come nel caso delle equazioni di primo grado, anche le radici di un'equazione di secondo grado coincidono coi punti nei quali la corrispondente funzione si annulla, ovvero interseca l'asse delle ascisse. Per constatarlo in pratica, consideriamo il seguente problema. Un'auto sta viaggiando a velocità $v = 5m/\sec$ e sta accelerando con accelerzione $a = 1m/\sec^2$ Se manterrà la stessa accelerazione, quanto impiegherà a percorrere i prossimi 1000 m? Si sa che lo spazio percorso è dato da $s = \frac{1}{2}at^2 + vt$, quindi bisogna risolvere l'equazione

$\frac{1}{2}t^2 + 5t = 1000$,ovvero: $\frac{1}{2}t^2 + 5t - 1000 = 0$.

Risolvendo con la nota formula[11], si trovano le radici: $t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4\frac{1}{2}1000}}{2 * \frac{1}{2}} = \frac{-5 \pm 45}{1} = (40, -50)$, delle quali evidentemente solo quella positiva è utile come soluzione del problema. Anche il grafico della corrispondente funzione, $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5t - 1000$ intercetta l'asse delle ascisse circa nei punti $t = 40$ e $t = -50$ e quindi poteva essere utile a risolvere il problema per via grafica, se non si fosse trovata la soluzione algebrica. Si noti che la soluzione grafica va ricercata nel piano cartesiano (che è illimitato) con opportuni criteri e che comunque si tratta pur sempre di una soluzione approssimata.



$\frac{1}{2}t^2 + 5t - 1000$

D.4 Sistemi di equazioni di secondo grado

Per ricavare un esempio di sistema di equazioni di secondo grado, consideriamo il seguente problema. "Tre pappagalli hanno in tutto 244 anni. Il rapporto di età tra il primo e il secondo è uguale a quello tra il secondo e il terzo. Sapendo che il primo compie proprio cent'anni, quanti anni hanno gli altri due?".

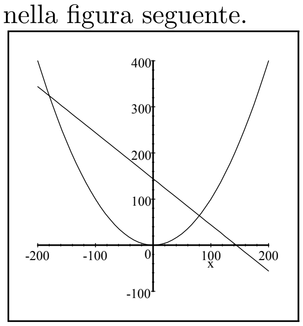
Dette x e y le età del secondo e del terzo, le informazioni del problema si tracucono nelle due equazioni: $x + y = 144$ e che $\frac{100}{x} = \frac{x}{y}$. Quindi si ha un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 144 \\ 100 \cdot y = x^2 \end{cases}$$

Ciascuna delle due equazioni di questo sistema può essere scritta in modo da esprimere una delle due variabili in funzione dell'altra, nel modo seguente:

$$\begin{cases} y = 144 - x \\ y = \frac{x^2}{100} \end{cases}$$

ciascuna delle due equazioni corrisponde a una funzione e risolvere il sistema significa trovare il punto o i punti in cui i grafici delle due funzioni si intersecano, come mostrato nella figura seguente.



y=144-x, y=x²/100

L'esempio mostra visivamente come un sistema di secondo grado con due equazioni in due incognite [12] può avere zero, una o due soluzioni distinte per ciascuna delle due incognite, a seconda della posizione reciproca delle rispettiva retta e parabola.

[11] Un'equazione di secondo grado nella forma standard $ax^2 + bx + c = 0$ può ammettere due radici (cioè due valori che sostituiti alla x rendono vera l'uguaglianza); la formula risolutiva, che fornisce i due valori, è: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, da intendersi che scegliendo il segno più si ottiene uno dei due valori, scegliendo il segno meno si ottiene l'altro. Naturalmente non dev'essere $a = 0$, altrimenti la formula non sarebbe definita essendo il suo denominatore nullo. Ma l'equazione in questo caso sarebbe di primo grado, quindi rientrerebbe nel caso trattato sopra. La quantità $b^2 - 4ac$,detta Δ ("delta") o discriminante dev'essere non negativa, altrimenti la sua radice quadrata non sarebbe un numero reale e quindi non esisterebbero radici reali. Se Δ è zero, la radice è unica e può essere considerata come la coincidenza di due radici.

[12] Si ricordi che il grado di un sistema di equazioni è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni componenti. Quindi un sistema di secondo grado con due equazioni comprende un'equazione di primo grado e una di secondo.

Si noti che in un sistema di secondo grado in due incognite non sempre è possibile o agevole esprimere una delle due in funzione dell'altra, in modo da fare ricorso al grafico della corrispondente funzione per ottenere una soluzione approssimata o anche solo per avere informazioni sull'esistenza di soluzioni.

Si noti anche che in questo esempio siamo in grado di trovare le soluzioni esatte per via algebrica. Si può procedere ad esempio per sostituzione, visto che in un'equazione di primo grado è sempre possibile esprimere una delle due incognite in funzione dell'altra: ricavando dalla prima equazione $y = 144 - x$ e sostituendo questa espressione nella seconda al posto di y, si ottiene

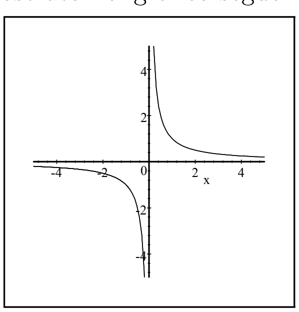
$$\begin{cases} y = 144 - x \\ x^2 + 100x - 144\,00 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione fornisce le due possibili soluzioni: $x = 80$ e $x = -180$, delle quali naturalmente solo la prima è accettabile come soluzione del problema. Quanto al valore di y, basta riprendere l'altra equazione per ricavare $y = 64$.

Anche per questa equazione si potrebbe studiare la corrispondente funzione, $f(x) = x^2 + 100x - 144\,00$ e procedere alla sua soluzione grafica approssimata come visto sopra.

E. Funzioni iperboliche o proporzionalità inversa

Quante borse di studio si possono assegnare con un finanziamento totale di centomila Euro? Evidentemente, più borse si assegnano, minore sarà l'importo di ciascuna, e viceversa. Numero di borse e loro importo sono grandezze *inversamente proporzionali*: aumentando l'una, l'altra diminuisce, in modo da tenere costante il prodotto. La funzione corrispondente è del tipo: $y = \frac{k}{x}$,con k costante numerica qualsiasi. Il grafico è un'iperbole equilatera, centrata sull'origine e con gli assi cartesiani come asintoti[13], come mostrato nel grafico seguente.

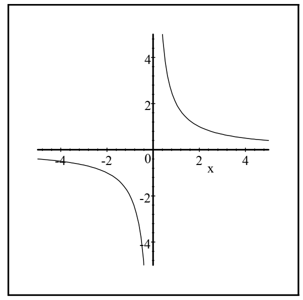


$f(x) = \ 1/x$

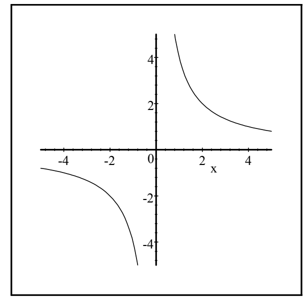
E.1 Significato del parametro k

Scegliendo per k valori positivi diversi, la funzione mantiene la sua forma e i suoi asintoti, ma è tanto più lontana da loro quanto più k è grande.

[13]In modo informale, si può chia,are asintoto una retta alla quale la funzione si avvicina sempre più strettamente quando si guardano porzioni del grafico sempre più lontane dall'origine.

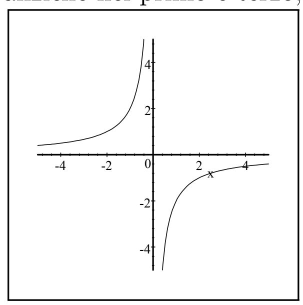


$f(x) = k/x$, con $k = 2$

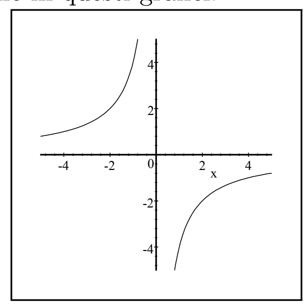


$f(x) = k/x$, con $k = 4$

Per valori negativi di k, la funzione riproduce la stessa forma e andamento, ma nel secondo e quarto quadrante anziché nel primo e terzo, come in questi grafici:



$f(x) = k/x$, con $k = -2$



$f(x) = k/x$, con $k = -4$

E.2 Un esempio di problema di proporzionalità inversa

"Per recintare un giardino rettangolare di 3200 mq occorre una rete lunga 240 metri. Quanto misurano i lati?"

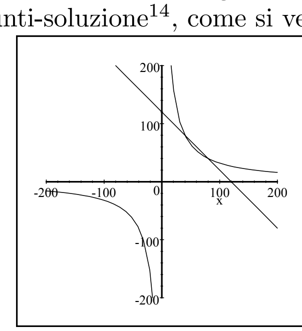
Dette x e y le due diverse lunghezze dei quattro lati, i dati del problema si traducono nelle due equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 240 & \text{(questo è il perimetro)} \\ xy = 3200 & \text{(e questa è l'area)} \end{cases}$$

da cui possiamo ricavare le corrispondenti funzioni:

$$\begin{cases} y = 120 - x \\ y = \frac{3200}{x} \end{cases}$$

che hanno come grafico una retta e un'iperbole. Anche in questo esempio i due grafici si possono intersecare nei due punti-soluzione[14], come si vede nella figura seguente:



f=$120-x,\ g$=$3200/x$

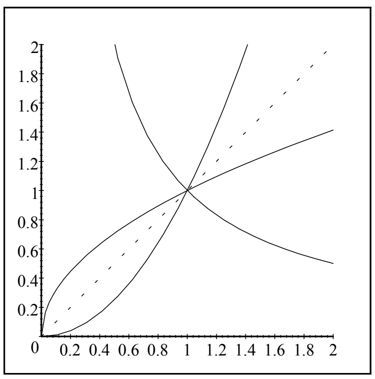
Questo fatto, che abbiamo visto in alcuni casi particolari, è vero in generale e può essere utile: quando non si riesce a risolvere algebricamente un sistema di due equazioni, se si riesce invece ad esprimere in ogni equazione una delle

[14]Naturalmente anche per questo esempio siamo in grado di ricavare le soluzioni esatte per via algebrica: sostituendo il valore $y = 120 - x$ nell'altra equazione, si arriva all'equazione risolutiva, di nuovo di secondo grado: $x^2 - 120x + 3200 = 0$. Le due soluzioni sono $x = 40$ e $x = 80$, che per l'altra variabile danno rispettivamente $y = 80$ e $y = 40$.

incognite in funzione dell'altra, il grafico delle corrispondenti funzioni può aiutare a capire se ci sono soluzioni, quante sono e che valori hanno, approssimativamente: basta guardare i loro punti di intersezione, proprio come il grafico di una singola funzione con suoi punti di zero indica l'esistenza, il numero e il valore approssimato delle soluzioni della corrispondente equazione. Queste proprietà sono sfruttate da appositi metodi e programmi che cercano le soluzioni di sistemi o di equazioni non agevoli da risolvere per via algebrica.

F. Funzioni potenza

Le funzioni di proporzionalità diretta, proporzionalità quadratica e proporzionalità inversa viste finora sono casi particolari della famiglia delle funzioni potenza, che più in generale hanno la forma: $f(x) = kx^n$, con k ed n costanti. Molte di esse sono definite solo per $x > 0$, e comunque spesso ha interesse il loro andamento solo nel primo quadrante[15]. Nella figura seguente è riportato il grafico di tre loro esempi:



$f(x) = kx^n, n = 2, \frac{1}{2}, -1$

Come si vede, tutte si incontrano nel punto $(x = 1, y = k)$; funzioni potenza con $k = 1$ ed esponente reciproco $(n, \frac{1}{n})$ sono una l'inversa dell'altra, si veda il prossimo paragrafo.

F.1 Funzione inversa, funzioni monotòne, funzione composta

Si intende che la funzione g sia inversa della funzione f, se risponde alla domanda "a quale valore si deve applicare la funzione f affinché essa fornisca il valore x?". Ad esempio, x^ne $x^{\frac{1}{n}}$ sono funzioni inverse, per ogni n dispari. Per n pari, lo stesso vale solo per $x > 0$ ad esempio, per $n = 2$, rappresentano il quadrato e la radice quadrata di un numero. Esistono infinite coppie di funzioni inverse, alcune di loro saranno citate tra poco: le coppie esponenziale/logaritmo e tangente/arcotangente. Tutte le coppie di funzioni inverse hanno grafici simmetrici rispetto alla bisettrice del quadrante, cioè rispetto alla retta $y = x$.

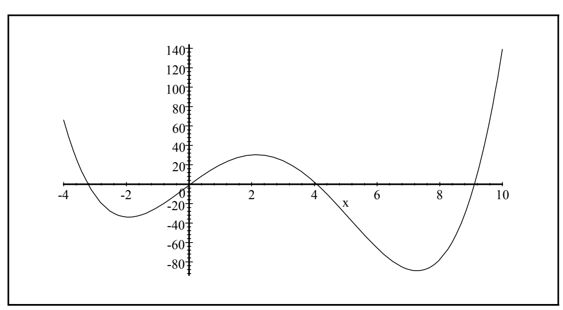
Si dice *monotòna* una funzione che sia sempre crescente o sempre decrescente. Sono invertibili, cioè ammettono l'esistenza di una funzione inversa, solo le funzioni monotòne; altrimenti, la relazione inversa non sarebbe univoca e quindi non sarebbe una funzione. Si dice monotòna su un intervallo una funzione che sia sempre crescente o sempre decrescente su quell'intervallo.

Date due funzioni, f e g, si chiama funzione *composta* di f e g la funzione che si ottiene applicando g al risultato di f. La funzione composta si indica come $g(f(x))$ o con la scrittura $g \circ f(x)$. Ad esempio, se $f(x) = x + 1$ e $g(y) = y^2$, la funzione composta di f e di g sarà: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$. Si noti che l'operazione di composizione tra funzioni non è commutativa, nel senso che fa differenza applicare prima l'una o prima l'altra di due funzioni; nell'esempio sopra, $f \circ g$ sarebbe $f(g(x)) = x^2 + 1$.

La composizione di una funzione con la sua inversa (se esiste) produce la funzione identità: ad esempio, $(\sqrt[3]{x})^3$ produce proprio x,come pure $\sqrt[3]{(x^3)}$. Anche $(\sqrt{x})^2$ e $\sqrt{(x^2)}$ producono proprio x, ma solo per $x > 0$.

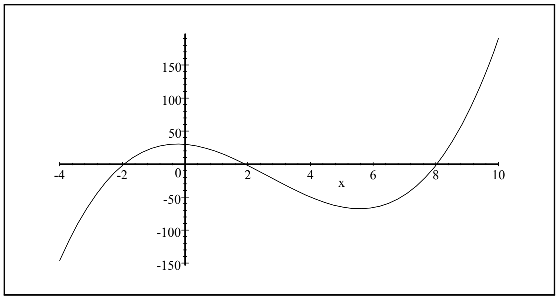
G. Funzioni polinomiali

Le funzioni polinomiali hanno la forma $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Questa scrittura si legge: *sommatoria per i che va da 0 a n di a con i per x alla i*, ovvero $a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$. Le funzioni lineari, lineari affini e quadratiche e le funzioni potenza con esponente intero positivo sono casi particolari di funzioni polinomiali. Si chiama grado del polinomio (e della funzione) il massimo tra gli esponenti di x. Una funzione polinomiale di grado n può avere da uno a n punti di zero se n è dispari e da zero n punti di zero se n è pari. Questa limitazione è collegata al fatto che una funzione di grado n può cambiare direzione, o "svoltare" al massimo $n - 1$ volte. Ad esempio, una funzione di primo grado ha per grafico una retta, che non "svolta" mai, una di secondo grado ha una parabola, che "svolta" una sola volta, ecc. Se il grafico incontra l'asse delle ascisse (e coi cambiamenti di direzione può farlo più di una volta), si determinano punti di zero e quindi altrettante radici della corrispondente equazione. Quest'ultima, quindi, può ammettere al massimo n soluzioni. Seguono due esempi di funzioni polinomiali, una di quarto e una di terzo grado, entrambe col massimo numero possibile di punti di zero (rispettivamente quattro e tre, naturalmente)



$f(x) = 0.2x^4 - 2x^3 - x^2 + 24x - 1$

[15]In dettaglio, per n intero oppure razionale con denominatore dispari, la funzione è definita per ogni x reale (se $n \geq 0$) o per ogni x reale diverso da zero (se $n < 0$); per n irrazionale oppure razionale con denominatore pari, la funzione è definita solo per $x \geq 0$ (se $n > 0$) o per $x > 0$ (se $n < 0$).



$g(x) = x^3 - 8x^2 - 4x + 30$

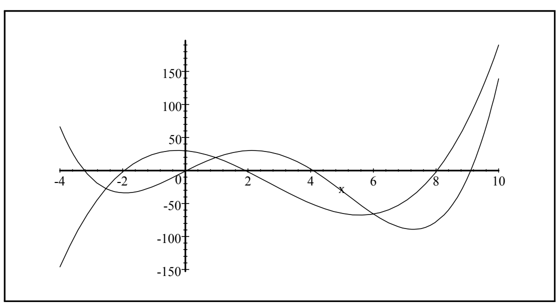
Le funzioni polinomiali sono piuttosto facili da trattare, anche con semplici programmi al computer, e sono spesso utili per approssimare funzioni di maggiore complessità.

G.1 Rapporto tra funzioni e sistemi di equazioni, caso delle funzioni polinomiali.

Accenniamo a questo argomento solo tramite un esempio composto combinando le due ultime funzioni viste. Le due equazioni corrispondenti formano il sistema

$$\begin{cases} y = 0.2x^4 - 2x^3 - x^2 + 24x - 1 \\ y = x^3 - 8x^2 - 4x + 30 \end{cases}$$

che è un sistema di dodicesimo grado, molto particolare in quanto in ciascuna di esse una delle due incognite appare isolata al primo membro. Le radici sono ottenibili, in forma approssimata, dalle coordinate dei punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni. La figura seguente ne mostra tre. Ampliando il grafico verso destra, si potrebbe dedurre l'esistenza di una quarta (e ultima) coppia di radici del sistema, o soluzioni.



Che le soluzioni non siano più di quattro si capisce, oltre che dal grafico, anche ricavando dal sistema, per semplice proprietà transitiva dell'uguaglianza, la seguente equazione

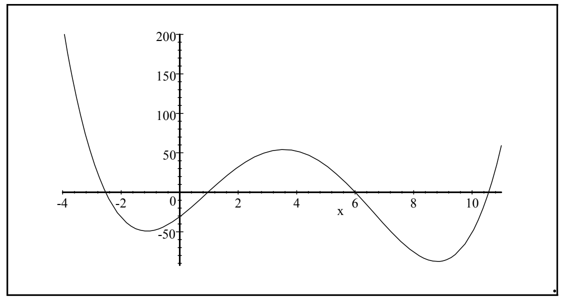
$$0.2x^4 - 2x^3 - x^2 + 24x - 1 = x^3 - 8x^2 - 4x + 30,$$

ovvero

$$0.2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 28x - 31 = 0$$

che evidentemente non può avere più di quattro radici e le ha proprio in corrispondenza dei punti di intersezione dei due grafici precedenti[16].

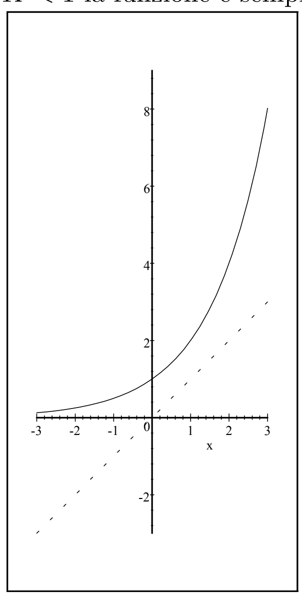
[16] Come già notato per i sistemi di secondo grado, a maggior ragione in un sistema di grado elevato non sempre è facile o possibile isolare in questo modo una delle due incognite. Si nori anche che in questo esempio i parametri sono stati scelti in modo da massimizzare i punti di incontro tra i due grafici.



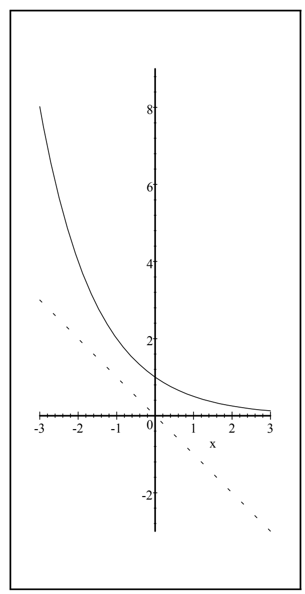
$0.2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 28x - 31$

H. Funzioni esponenziali

Partiamo da un facile indovinello: "In un laghetto vegeta una diatomea che ogni giorno raddoppia la superficie che occupa. In un mese, ha coperto un quarto del lago. Quanti giorni impiegherà a coprire il resto del lago?" Alcuni si stupiscono che la risposta sia semplicemente *due giorni*. In questo esempio, la superficie occupata è descritta dalla funzione: $f(x) = a2^x$,nella quale la variabile indipendente compare come esponente di una potenza. Le funzioni di questo tipo si chiamano funzioni esponenziali e in generale hanno la forma $f(x) = aK^x$, con $K > 0$. Nei due grafici di esempio seguenti, per semplicità a vale 1 e si vede che per a positivi, se $K > 1$ la funzione è sempre crescente, se $K < 1$ la funzione è sempre decrescente.



$f(x) = K^x, K = 2$



$f(x) = K^x, K = \frac{1}{2}$

Per valori di K maggiori di uno, tutte le funzioni esponenziali sono caratterizzate, nel primo quadrante, da pendenza forte e fortemente crescente. Anzi, tra tutte le funzioni elementari, le funzioni esponenziali sono quelle che al crescere dell'argomento crescono più rapidamente. Addirittura, si dice comunemente che un certo fenomeno cresce in modo esponenziale, per dire che cresce enormemente, al di fuori di ogni possibile controllo. A questo proposito è famosa la leggenda del sultano che, volendo ricompensare generosamente l'inventore del gioco degli scacchi, si sentì chiedere un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così via. Credette di cavarsela con ben poco, o addirittura di essere stato deriso, ma dovette scoprire che invece la richiesta era spropositata. Infatti, la formula che calcola il numero di chicchi necessari per n caselle è $2^n - 1$ e, a conti fatti, il sultano avrebbe dovuto accumulare l'intera produzione del suo stato per centinaia di migliaia di anni[17]. Ed erano solo 64 caselle, un numero apparentemente innocuo.

Per giunta, hanno andamento esponenziale tutte le grandezze che crescono con un tasso costante, cioè di una percentuale di se stesse per ogni periodo, ad esempio la popolazione globale o il montante di un capitale impiegato a tasso di interesse composto. Valga come esempio il calcolo per questo ultimo caso.

Il metodo detto Interesse Composto Discontinuo (ICD) prevede che alla fine dei ogni periodo si sommi l'interesse di quel periodo al capitale iniziale. Sia C_0 il capitale iniziale, i il tasso di interesse fisso per ogni periodo di tempo (ad esempio un anno) e C_x il capitale finale, o montante, che risulta dopo che sono trascorsi x periodi. Alla fine del primo periodo si ottiene il nuovo capitale C_1, che farà da capitale iniziale per il calcolo dell'interesse nel secondo periodo. Sarà: $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$. Alla fine del secondo periodo, l'interesse maturato sarà $C_1 \cdot i$ e sommando di nuovo capitale iniziale e interesse il capitale finale C_2 diventa: $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2$. Dopo x periodi, il montante o capitale finale, C_x sarà diventato $C_x = C_0 \cdot (1+i)^x$. Si tratta proprio di una funzione esponenziale della forma $f(x) = aK^x$, con $a = C_0$ e $K = (1+i)$. Come in tutte le funzioni esponenziali, il montante alla lunga è soggetto a crescere vertiginosamente. In merito, viene citata l'irrealistica ipotesi di capitalizzare fino ad oggi la monetina che secondo il vangelo sarebbe stata offerta in elemosina da una vedova. Se fosse stata messa a frutto a un tasso di interesse fisso del tre per cento all'anno, oggi, dopo due millenni, tutto l'oro del mondo[18] sarebbe una frazione assolutamente insignificante del capitale risultante. Per gli effetti della crescita esponenziale, ovviamente è critico il tasso di interesse, tanto da rendere necessarie apposite regolamentazioni anti-usura, che moderano appunto il tasso praticato. Ha influenza sensibile, anche se non enorme, anche la lunghezza del singolo periodo considerato; cambia, ad esempio, considerare un tasso del 4% all'anno oppure del 1% a trimestre.

Calcoli del tutto identici si applicano ad ogni grandezza che cresce a tasso costante, ad esempio ad una popolazione che fosse in crescita percentuale costante. Anche a questo proposito si racconta un paradosso: con un'ipotetica crescita demografica costante del 2% all'anno, se all'inizio dell'era cristiana ci fossero state al mondo anche solo due persone, oggi la popolazione mondiale sarebbe talmente numerosa che in ogni metro quadro della terra dovrebbero nascere, vivere e morire migliaia di persone.

Ogni funzione esponenziale raddoppia il suo valore in ogni intervallo costante, che dipende solo dal tasso di crescita. Ad esempio, una grandezza che aumenta col tasso costante del 3% all'anno, raddoppia in poco più di 23 anni, mentre col tasso del 15% raddoppia in poco meno di 5 anni. Una comoda regola empirica dice che con un tasso di crescita percentuale i il numero di periodi richiesto per il raddoppio è circa $n = \frac{70}{i}$. Questa formula si basa solo su una coincidenza puramente numerica, comunque per tassi di crescita modesti (alcune unità percento) fornisce approssimazioni sufficienti.

Concludendo, nessun fenomeno reale può crescere con un tasso costante, se non per una durata limitata. Ad esempio, è assolutamente impossibile mantenere a lungo termine ritmi di crescita costante del PIL, o della demografia, o dei consumi pro-capite, e tantomeno di due o più di queste grandezze contemporaneamente.

`Altri metodi per il calcolo del montante`

Il metodo qui introdotto, ICD, è il più usato nella gestione di prestiti e mutui. Altri metodi sono quello dell'Interesse Semplice (IS) e quello dell'interesse composto continuo o Interesse Composto Matematico (ICM).

Anche col metodo dell'Interesse Semplice, IS, il montante si ricava sommando gli interessi al capitale iniziale, ma solo alla fine del prestito e non alla fine di ogni periodo. Gli interessi si calcolano moltiplicando l'interesse di un singolo periodo per il numero di periodi trascorsi. Quindi, dopo x periodi si sarà prodotto un capitale finale $C_x = C_0 + C_0 \cdot i \cdot x$, ovvero $C_x = C_0 \cdot (1 + i \cdot x)$. Si tratta di una funzione lineare affine, con coefficiente angolare $C_0 \cdot i$. Quindi la differenza tra sommare interessi e capitale a fine prestito oppure ad ogni periodo, apparentemente poco rilevante, alla lunga produce invece differenze enormi.

Al contrario, col metodo dell'interesse composto continuo o Interesse Composto Matematico (ICM), l'interesse viene sommato al capitale con continuità, ovvero istante per istante. In questo caso, dopo x periodi, il capitale totale sarà diventato $C_x = C_0 \cdot e^{ix}$, quindi anche in questo caso si tratta di una funzione esponenziale, come la funzione ICD; è più ripida ma per tassi fino al 10 % e per periodi fino alla decina differisce di poco da essa.

Spesso possono essere utili formule inverse rispetto a queste. Ad esempio, quale tasso di interesse è stato realmente applicato se con un dato capitale iniziale e una data durata si è prodotto un dato montante? Alcune di queste formule inverse fanno uso di logaritmi, per cui vengono tutte posticipate di poco, subito dopo l'introduzione dei logaritmi.

I. Funzioni logaritmiche

Il logaritmo è l'operazione che calcola a quale valore deve essere elevata una determinata costante K per ottenere il valore x. E' l'inverso dell'elevamento a potenza e la funzione corrispondente si scrive $f(x) = \log_K(x)$. Questa scrittura si legge *logaritmo in base K di x*. Le seguenti tabelle riportano come esempi alcuni valori della funzione $f(x) = \log_2(x)$, ovvero del *logaritmo in base* 2 *di x*:

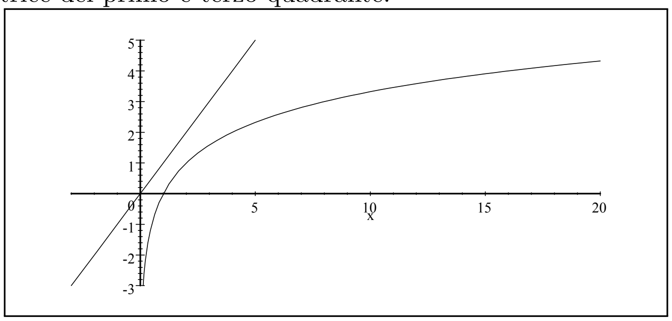
[17] Anche la produzione mondiale odierna (quasi 700 milioni di tonnellate annue) sarebbe meno di un millesimo di quanto occorre. Un altro modo di vedere la cosa: occorrerebbe tanto grano da ricoprire i cinque continenti con uno strato alto un metro.

[18] Si stima che al mondo ne esistano circa 171 mila tonnellate e che altre 25 mila siano estraibili con le attuali tecnologie.

x	$\log_2(x)$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4

x	$\log_2(x)$
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{16}$	-4
$\frac{1}{32}$	-5

Si noti che la funzione logaritmo esiste solo per $x > 0$. Come ogni funzione inversa, la funzione logaritmo, rispetto all'esponenziale, ha grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:



$f(x) = \log_2 x$

Come le funzioni esponenziali sono quelle che al crescere dell'argomento crescono più rapidamente di tutte le funzioni elementari, così le logaritmiche, loro inverse, sono quelle che crescono più lentamente.

La base usata più spesso per le funzioni esponenziali è il numero e, base dei logaritmi neperiani o naturali[19]. Il motivo di questa preferenza, apparentemente astrusa, è che si semplificano i conti quando si opera con derivate e integrali. L'inversa della funzione $f(x) = e^x$ è la funzione $\log_e(x)$. Solitamente si scrive $\log(x)$ (senza indicare la base) oppure $\ln(x)$ per intendere $\log_e(x)$, mentre si scrive $\text{Log}(x)$ (senza base, ma con la maiuscola) per $\log_{10}(x)$. Dato un numero, il suo logaritmo in base dieci se è intero indica quanti zeri ha quel numero. Ad esempio, $\log_{10}(n) = 3$ significa $n = 1000$, ovvero tre zeri. Se non è intero, arrotondato per eccesso indica il numero di cifre intere. Ad esempio, $\log_{10}(n) = 2,45$ significa $n =$circa 282, ovvero tre cifre.

`Formule inverse per i calcoli del montante`

Dopo aver introdotto i logaritmi, si possono ricavare con pochi passaggi anche le formule inverse per calcolare il capitale iniziale, o il tasso di interesse o la durata del prestito in funzione dei restanti parametri, per ciascuno dei tre metodi visti sopra, IS, ICD e ICM.

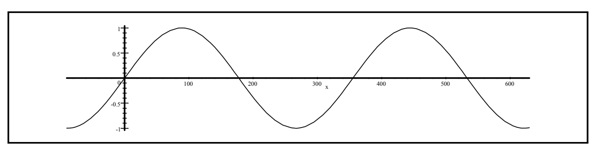
IS	$C_0 = \frac{C_x}{(1+ix)}$	$i = \frac{C_x - C_0}{C_0 \cdot x}$	$x = \frac{C_x - C_0}{C_0 \cdot i}$
ICD	$C_0 = \frac{C_x}{(1+i)^x}$	$i = \sqrt[x]{\left(\frac{C_x}{C_0}\right)} - 1$	$x = \log_{1+i}\left(\frac{C_x}{C_0}\right)$
ICM	$C_0 = \frac{C_x}{e^{ix}}$	$i = \frac{\ln\left(\frac{C_x}{C_0}\right)}{x}$	$x = \frac{\ln\left(\frac{C_x}{C_0}\right)}{i}$

J. Funzioni trigonometriche

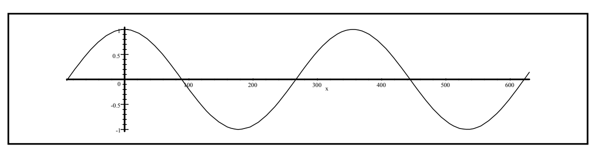
Le funzioni trigonometriche dette Seno, Coseno e Tangente, indicate con $\sin(x), \cos(x)$ e $\tan(x)$, associano un certo valore ad un angolo x. Per angoli minori di un angolo retto, esse si possono definire pensando a un triangolo rettangolo: il *Seno* di uno degli angoli acuti è definibile come il rapporto tra il cateto a lui opposto e l'ipotenusa. *Coseno* significa seno del complementare, quindi è il rapporto tra il cateto a lui adiacente e l'ipotenusa, pari quindi al seno dell'altro angolo acuto, visto che i due angoli acuti sono tra loro complementari. La funzione *Tangente* è definita come il rapporto tra seno e coseno, ovvero come rapporto tra i due cateti. Questo modo di definirle giustifica anche il nome della trigonometria, nel senso che serve ai calcoli sulle misure dei triangoli. Ad esempio, se di un oggetto non raggiungibile si conosce la distanza e si misura l'angolo che sottende alla vista, allora la sua dimensione sarà data dalla distanza per il seno dell'angolo sotteso. Viceversa, se se ne conosce la dimensione, misurando l'angolo si può ricavare la distanza dividendo la dimensione per il seno dello stesso angolo.

Più in generale, per definire le funzioni trigonometriche anche per angoli maggiori di un angolo retto, ci si riferisce al piano cartesiano di assi X e Y[20] con una circonferenza di raggio R centrata sull'origine. Un angolo al centro di misura x, presa in senso antiorario partendo dall'asse X, individua un punto sulla circonferenza, di coordinate (X, Y). Il *Seno*[21] di tale angolo è definito come $\frac{Y}{R}$, il *Coseno* come $\frac{X}{R}$, la *Tangente* come rapporto tra seno e coseno, ovvero come $\frac{Y}{X}$; naturalmente la tangente è definita solo per $X \neq 0$, cioè per $x \neq 90°$, $x \neq 270°$ ecc.

Le funzioni seno e coseno assumono valori compresi tra -1 e 1 e sono periodiche: dopo 360 gradi (un angolo giro) si ripetono identiche. Di conseguenza, anche la tangente si ripete periodicamente, e non solo ad ogni giro, ma anche ad ogni mezzo giro, come mostrato nei grafici seguenti:



$f(x) = \sin(x)$

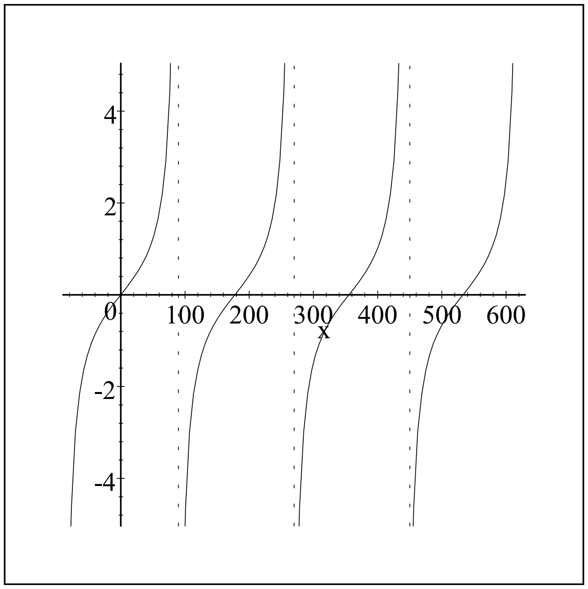


$f(x) = \cos(x)$

[19] e è un numero reale definito dal valore di un limite: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$. E' pari a circa 2.718 3...

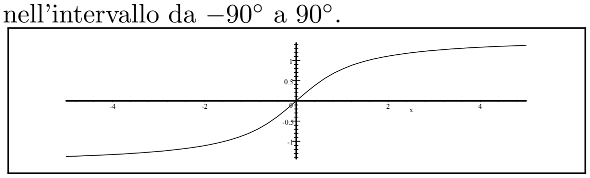
[20] In questa frase, le coordinate del piano cartesiano vengono indicate con le maiuscole, X e Y, per distinguerle dalle variabili indipendente e dipendente delle funzioni trigonometriche, x e y.

[21] Il nome della funzione *Seno* è riferito a questo tipo di definizione e deriva da un'imprecisa traduzione dall'arabo al latino: la parola che significa *corda* fu tradotta come *golfo*, ovvero *sinus* (le due parole, in arabo, si scrivono allo stesso modo). *Coseno* viene da *Co*mplementi *sinus* (seno del complementare) e *Tangente* viene da una costruzione geometrica leggermente diversa, in cui equivalentemente si misura il rapporto tra il tratto di tangente intercettata e il raggio.



$f(x) = \tan(x)$

Queste funzioni periodiche sono invertibili solo se considerate in un intervallo dove non assumano mai due volte lo stesso valore. Ad esempio, la funzione inversa della tangente è l'*arcotangente*, cioè la funzione che associa a un numero l'angolo che ha per tangente quel numero; per definirla, si usa considerare i valori della tangente solo nell'intervallo da $-90°$ a $90°$.



$f(x) = \arctan x$

Per semplicità, in questi grafici gli angoli sono indicati in gradi. Un'altra unità di misura per gli angoli è il radiante, definito così: in una circonferenza, un angolo al centro pari a un radiante sottende un arco di lunghezza pari al raggio; quindi 2π radianti equivalgono a 360 gradi (l'angolo giro) e viceversa un radiante equivale a circa 57,3 gradi. Di norma (e anche nelle pagine seguenti) gli angoli vengono misurati in radianti dato che ciò comporta semplificazioni nei calcoli di derivate e integrali. I singoli valori delle funzioni trigonometriche si calcolano facilmente solo per pochi angoli come π, i suoi multipli e alcune sue frazioni semplici, sostanzialmente ricorrendo alla geometria del quadrato e del triangolo equilatero. Per altri angoli, occorrono calcoli assai complessi; fino ad alcuni decenni fa, si ricorreva ad apposite, ingombranti tabelle, oggi naturalmente il computer ripete i calcoli ogni volta che servono.

K. Retta tangente ad una curva (facoltativo)

Questo paragrafo esplicita calcoli non indispensabili al filo del discorso di questi appunti, ma utili a giustificare osservazioni contenute nel seguente capitolo sulle derivate. Specificamente, qui si determina la funzione che ha come grafico la retta tangente ad una curva in un dato punto, con metodo suggerito dagli esempi di sistemi di due equazioni fatti sopra.

Se i punti di intersezione tra retta e curva hanno per coordinate le soluzioni del corrispondente sistema di equazioni, imponendo che il sistema abbia soluzione unica si determinerà la retta che tocca in un solo punto, cioè la retta tangente. I due esempi seguenti determinano il coefficiente angolare della retta tangente a una parabola e a un'iperbole.

Primo esempio: retta tangente alla parabola di equazione $y = ax^2$,nel punto (x_0, y_0).

Affinché il punto $(x_{0,}y_0)$ stia sulla retta

$y = mx + q$, deve avere coordinate tali che

$y_0 = mx_0 + q$. Sottraendo queste due uguaglianze membro a membro, si ha:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, cioè:

$y = m(x - x_0) + y_0$.

Affinché lo stesso punto $(x_{0,}y_0)$ stia anche sulla parabola di equazione

$y = ax^2$,deve avere coordinate tali che

$y_0 = ax_0^2$. Sostituendo questi valori di y e di y_0 nella precedente si ottiene:

$ax^2 = m(x - x_0) + ax_0^2$, cioè:

$ax^2 - mx + mx_0 - ax_0^2 = 0$, da cui:

$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4amx_0 + 4a^2x_0^2}}{2a}$.Affinchè il punto di tangenza sia unico, il Δ o discriminante deve essere nullo, cioè dev'essere:

$m^2 - 4amx_0 + 4a^2x_0^2 = 0$, da cui:

$m = 2ax_0 \pm \sqrt{4a^2x_0^2 - 4a^2x_0^2} = 2ax_0$,

$q = y_0 - mx_0 = ax_0^2 - 2ax_0^2 = -ax_0^2$.

Quindi la retta tangente alla parabola di equazione $y = ax^2$,nel punto (x_0, y_0) è il grafico della $f(x) = 2ax_0x - ax_0^2$.

Secondo esempio: retta tangente all'iperbole $y = \frac{k}{x}$,nel punto (x_0, y_0).

Affinché il punto $(x_{0,}y_0)$ stia sulla retta

$y = mx + q$, deve avere coordinate tali che

$y_0 = mx_0 + q$. Sottraendo queste due uguaglianze membro a membro, si ha:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, cioè:

$y = m(x - x_0) + y_0$.

Affinché lo stesso punto $(x_{0,}y_0)$ stia anche sull'iperbole

$y = \frac{k}{x}$,deve avere coordinate tali che

$y_0 = \frac{k}{x_0}$. Sostituendo questi valori di y e di y_0 nella precedente si ottiene:

$\frac{k}{x} = m(x - x_0) + \frac{k}{x_0}$,da cui:

$kx_0 = mxx_0(x - x_0) + kx$,

$kx_0 = mx^2x_0 - mxx_0^2 + kx$,

$mx^2x_0 - x(mx_0^2 - k) - kx_0 = 0$,

$x = \frac{mx_0^2 - k \pm \sqrt{m^2x_0^4 + k^2 - 2kmx_0^2 + 4kmx_0^2}}{2mx_0}$.

Come sopra, affinchè il punto di tangenza sia unico, il Δ o discriminante deve essere nullo, cioè dev'essere:

$m^2x_0^4 + k^2 - 2kmx_0^2 + 4kmx_0^2 = 0$,cioè

$(mx_0^2 + k)^2 = 0$, che implica

$mx_0^2 + k = 0$,

$m = \frac{-k}{x_0^2}$,

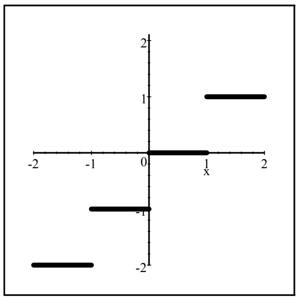
$q = y_0 - mx_0 = \frac{k}{x_0} + \frac{k}{x_0^2}x_0 = \frac{2k}{x_0}$.

Quindi la retta tangente all'iperbole $y = \frac{k}{x}$,nel punto (x_0, y_0), è il grafico della $f(x) = \frac{-k}{x_0^2}x + ax_0^2$.

III. Limiti e continuità

A. Definizione intuitiva di funzione continua

In modo pratico, diciamo che una funzione è continua su tutto il dominio di definizione, o semplicamente che è *continua* se si può tracciare *tutto* il suo grafico senza staccare la penna dal foglio. Ad esempio, le funzioni lineari e quadratiche viste finora sono funzioni continue, mentre per la funzione iperbolica evidentemente bisogna staccare la penna in corrispondenza di $x = 0$. Per la funzione $f(x) = \lfloor x \rfloor$ cioè parte intera[22] di x, si ha uno stacco in corrispondenza di ogni numero intero, come si vede dal suo grafico:



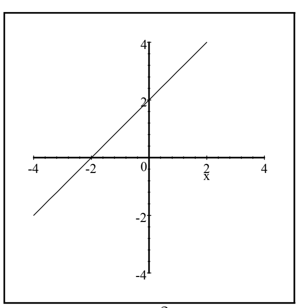
$f(x) = \lfloor x \rfloor$

Si dice che una funzione è *continua in un intervallo* se quel tratto di grafico si può tracciare senza staccare la penna, si dice che è *continua in un punto* se quel punto appartiene ad un intervallo in cui è continua. La funzione sopra è continua in ogni intervallo compreso tra due numeri interi, ma non è continua nei punti che corrispondono a un numero intero.

B. Limite

Viene qui introdotto il concetto di *limite,* seppure anch'esso in modo informale, utile per avere un'idea un po' più precisa di funzione continua, ma soprattutto necessario a spiegare il concetto di derivata, introdotto nel capitolo successivo.

Ad esempio, la funzione $\frac{x^2+x-2}{x-1}$ non è definita nel punto $x = 1$, in quanto il suo denominatore si annulla in quel punto.



$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$

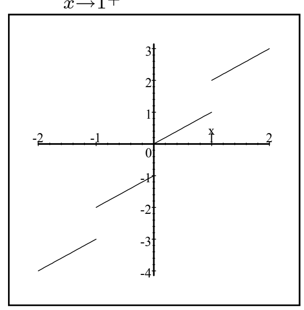
Ma se osserviamo l'andamento della funzione intorno al punto $x = 1$, la funzione data è sempre pari alla funzione $f(x) = x + 2$[23], tranne nel punto stesso, $x = 1$, dove non è definita. Vicino al punto $x = 1$, la funzione si discosta di poco dal valore 3; anzi, in tutti i punti di ogni predeterminato intervallo intorno a $x = 1$, il valore dalla funzione è poco diverso da 3 e questa differenza può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo l'intervallo stesso opportunamente stretto. Si dice allora che il limite della funzione per x che tende a 1 è 3, o che per x che tende a 1 la funzione *converge* a 3 e si scrive: $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

In generale, si dice che una funzione f tende al limite L per x che tende a c, e si scrive: $\lim_{x\to c} f(x) = L$, se in tutto un opportuno intervallo intorno a c il valore della funzione è arbitrariamente vicino a L[24].

Si noti che il limite di una funzione in un punto non ha a che fare col valore della funzione in quel punto (che magari addirittura non esiste, come nell'esempio sopra) ma dipende solo dai valori della funzione nei punti vicini.

B.1 Limite destro, limite sinistro

La funzione $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$, cioè $x+$ parte intera di x, nel punto $x = 1$ non ha limite, ma se si osserva, anziché l'intervallo centrato su quel punto, un intervallo che sta solo alla sua sinistra, si trova che la funzione "si discosta poco" (nel senso detto sopra) dal valore 1; si dice allora che esiste il *limite sinistro* della funzione per x che tende a 1, e che questo limite[25] è 1. Si scrive: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$. Allo stesso modo, osservando un intervallo che sta solo a destra di quello stesso punto, si trova che la funzione "si discosta di poco" dal valore 2; si dice allora che esiste il *limite destro* della funzione per x che tende a 1, e che questo limite[26] è 2. Si scrive: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$.



$f(x) = x + \lfloor x \rfloor$

Un'altra maniera di definire il limite in un punto è pro-

[22] Funzioni di questo tipo sono usate ad es. nei tariffari dei parcheggi, ad esempio: "un euro per ogni ora o frazione di ora". Si noti che questa funzione non è una funzione elementare.

[23] Non a caso il numeratore vale $(x + 2)(x - 1)$ . . .

[24] Intuitivamente, il fatto che esista questo limite significa che l'andamento della funzione è tale da poter vincere con sicurezza una scommessa stabilita in questi termini: "se tu dici un qualunque numero positivo, allora io riesco a individuare un intervallo intorno al punto c, tale che in ogni punto appartenente a questo intervallo (escluso lo stesso punto c) il valore della funzione differisce da L per meno del numero che hai detto". In simboli, questo si può esprimere cosı̀: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \{I(c, \delta) - c\} |f(x) - c| < \varepsilon$. Questa formula si legge: per ogni *epsilon* maggiore di zero, esiste un *delta* tale che per ogni x appartenente all'intorno di centro c e raggio *delta*, tranne il punto c stesso, $f(x)$ differisce da L per meno di *epsilon*.

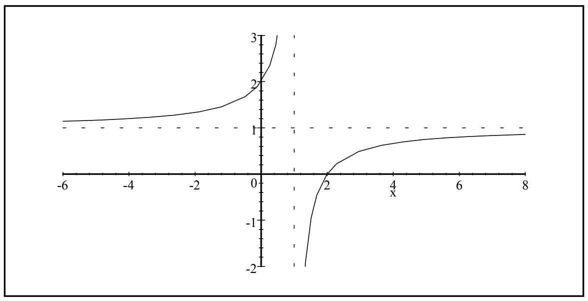
[25] In questo caso, la scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero positivo, allora io riesco a individuare un intervallo *a sinistra* del punto $x = 1$, per ogni punto del quale il valore della funzione differisce da 1 per meno del numero che hai scelto".

[26] In questo caso, la scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero positivo, allora io riesco a individuare un intervallo *a destra* del punto $x = 1$, per ogni punto del quale il valore della funzione differisce da 2 per meno del numero che hai scelto"

prio quella di dire che esistono sia il limite sinistro che il limite destro, e che i due coicidono. In questo esempio, nel punto $x = 1$ i limiti destro e sinistro esistono, ma sono diversi, quindi il limite non esiste.

B.2 Limiti a infinito

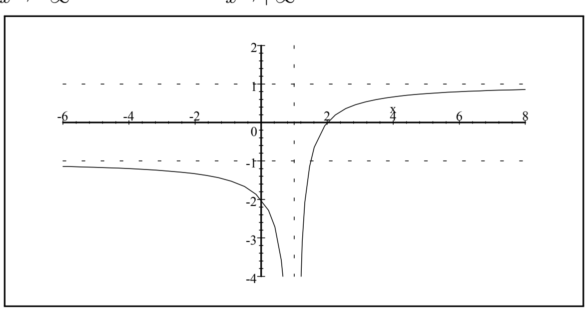
Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.Per valori di x lontani da $x = 1$, il valore della funzione è vicino a 1. Anzi, se si osserva la funzione in zone sempre più lontane da 1, il suo valore si discosta sempre meno dal valore 1. Si dice allora che il limite della funzione, per x che tende *a infinito*, è 1 e si usa la seguente notazione[27]: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.



$f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Invece, la funzione: $f(x) = \frac{x-2}{|x-1|}$ allontanandosi dall'origine verso sinistra ha valori sempre più vicini a -1, mentre verso destra sempre più vicini a 1. Si dice allora che il limite della funzione per x che tende a *meno infinito* è -1 (meno uno), e che il limite della funzione per x che tende a *più infinito* è 1.

Si scrive, rispettivamente[28]:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.



$f(x) = \frac{x-2}{|x-1|}$

In questo esempio, non esiste il limite della funzione per $x \to \infty$,ma esistono i due limiti per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

[27] In questo caso, la scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero positivo, allora io riesco a individuare un punto T, in modo che per ogni punto x che disti dall'origine più di T il valore della funzione differisce da 1 per meno del numero che hai scelto"

[28] Riguardo al limite per $x \to -\infty$, che vale -1, la scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero positivo, allora io riesco a individuare un punto T, in modo che per ogni punto x *a sinistra* di T il valore della funzione differisce da -1 per meno del numero che hai scelto". Per il limite per $x \to +\infty$, che vale 1, la scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero positivo, allora io riesco a individuare un punto T, in modo che per ogni punto x *a destra* di T il valore della funzione differisce da 1 per meno del numero che hai scelto".

B.3 Proprietà dei limiti verso le operazioni aritmetiche

L'operazione di limite "si comporta bene" rispetto alle operazioni aritmetiche. Infatti, date due funzioni che hanno limite finito, anche la loro somma ha limite finito, ed esso è proprio la somma dei due limiti. Più in dettaglio, se

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = M$, allora esiste: $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Lo stesso vale per le altre operazioni aritmetiche, cioè:

$\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$,

$\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$,

e (se $M \neq 0$) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

B.4 Limiti infiniti

Le due funzioni usate come esempi nel paragrafo precedente non sono definite nel punto $x = 1$, e nell'intorno di quel punto assumono valori lontani dallo zero. Anzi, ciascuna delle due, in un intorno sempre più stretto del punto $x = 1$, assume solo valori sempre piu lontani da zero, al di là di ogni prefissata limitazione. In questi casi si dice che la funzione tende a infinito per x che tende a uno, e si usa la seguente notazione[29]: $\lim_{x\to1} f(x) = \infty$.

Per la seconda delle due funzioni, si può precisare anche l'informazione che nell'intorno del punto $x = 1$ essa è sempre negativa. Questa funzione per x che tende a uno tende a *meno infinito*, e si scrive: $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$ [30].In tutti i casi in cui una funzione ha limite infinito, si dice anche che la funzione è divergente o *diverge*. Se si può (e si vuole) specificare, si dice: "la funzione diverge a più infinito", oppure "a meno infinito".

B.5 Limiti infiniti a infinito

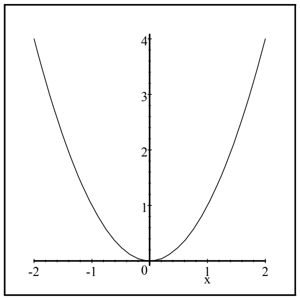
In modo del tutto analogo, si definisce che una funzione tende a infinito per x che tende a infinito, quando per valori di x sempre più lontani da zero il valore della funzione si allontana da zero al di là di ogni prefissata limitazione[31].

Ad esempio, date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^3$,

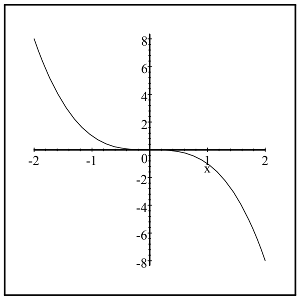
[29] La corrispondente scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero, allora io riesco a individuare un intervallo centrato sul punto $x = 1$, per ogni punto del quale il *valore assoluto* della funzione è maggiore del numero che hai scelto" (sempre escludendo il punto $x = 1$ dalla scommessa, come al solito).

[30] In questo caso, la famosa scommessa sicura sarebbe: "se tu scegli un qualunque numero, allora io riesco a individuare un intervallo centrato sul punto $x = 1$, per ogni punto del quale il valore della funzione è *minore* del numero che hai scelto. Si ricordi che anche tra due numeri negativi è minore quello che sta più a sinistra, ad esempio -2 è minore di -1.

[31] ovvero quando si è sicuri di vincere la scommessa: "se tu scegli un qualunque numero, allora io riesco a individuare un punto T, in modo che per ogni punto x che disti dall'origine più di T il valore assoluto della funzione è maggiore del numero che hai stabilito"



$f(x) = x^2$



$g(x) = -x^3$

si ha che:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$
Inoltre, si potrebbe anche specificare che
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$,con gli ovvî corrispondenti enunciati della famosa scommessa sicura, dei quali si riporta solo un caso, a titolo di esempio: dire che $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, è come scommettere: "se tu scegli un qualunque numero, allora io riesco a individuare un punto T, in modo che in ogni punto x a sinistra di T il valore della funzione $g(x)$ è maggiore del numero che hai scelto". Invece, ad esempio non è vero che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, né che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

B.6 Infiniti e infinitesimi e loro ordini

Infiniti

Una funzione che tende a infinito (per x che tende a infinito) si chiama anche *un infinito*. Nel confrontare due funzioni, f e g,entrambe infinite, può servire di capire se una delle due è incomparabilmente maggiore dell'altra, cioè se cresce incomparabilmente più in fretta oppure se c'è tra loro un possibile confronto. Il paragone si fa col quoziente tra le due funzioni. Se la funzione risulante dal rapporto tra f e g ha limite infinito, vuol dire che f prevale su g e si dice che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g; se il quoziente ha limite zero, vuol dire che è g a prevalere su f; se il limite esiste ed è finito, ma diverso da zero, vuol dire che f e g sono due infiniti dello stesso ordine. Se infine $\lim_{x\to\infty} q(x)$ non esiste, allora fe g sono due infiniti non confrontabili.

In altri termini, date due funzioni f e g, entrambe infinite, cioè ad es. con:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, per confrontare f con g si studia la funzione quoziente, data da $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Si può allora verificare uno dei seguenti casi:

- se $\lim_{x\to\infty} q(x) = \infty$, allora f è un infinito di ordine superiore rispetto a g;
Ad esempio, le due funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$ sono entrambe infinite per x che tende a infinito; ma è facile vedere che il loro rapporto, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x} = x^2$ ha limite infinito per x che tende a infinito. Quindi x^3 è un infinito di ordine superiore a x. In generale, per x che tende a infinito,se $n > m$ allora x^n è un infinito di ordine superiore a x^m .
- se $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$, allora g è un infinito di ordine superiore rispetto a f, ovvero f è di ordine inferiore a g;
Ad esempio, le due funzioni, $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ sono entrambe infinite per x che tende a infinito; ma il loro rapporto, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ ha limite zero per x che tende a infinito. Quindi x^2 è un infinito di ordine inferiore a x^3.
- se $\lim_{x\to\infty} q(x) = L \neq 0$, allora g ed f sono infiniti dello stesso ordine;
Ad esempio, le due funzioni, $f(x) = 4x^3 + 10x^2$ e $g(x) = x^3/100$ sono entrambe infinite per x che tende a infinito; ma il loro rapporto, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^3+10x^2}{x^2/100} = 400 + \frac{1000}{x}$ per x che tende a infinito ha limite finito, pari a 400. Quindi $4x^3 + 10x^2$ e $x^3/100$ sono infiniti dello stesso ordine.
- se il $\lim_{x\to c} q(x)$ non esiste, allora fe $g$sono due infiniti non confrontabili.
Ad esempio, le due funzioni, $f(x) = x(2+ \sin(x))$ e $g(x) = x$ sono entrambe infinite per x che tende a infinito; ma il loro rapporto, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x(2+\sin(x)}{x} = 2 + \sin(x)$ non ha limite per x che tende a infinito. Quindi questi due infiniti non sono confrontabili.

B.6.a Alcuni limiti a infinito.

- Le funzioni polinomiali, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ hanno tutte $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$. Più in dettaglio,
-se $a_n > 0$ e n dispari, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$
-se $a_n > 0$ e n pari, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$
-se $a_n < 0$ e n dispari, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$
-se $a_n < 0$ e n pari, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$.
Naturalmente funzioni lineari, lineari affini, quadratiche e funzioni potenza con esponente positivo rientrano in questa regola.
- Le funzioni esponenziali, $f(x) = K^x$, con $K > 1$, hanno $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.Viceversa, per $0 < K < 1$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- Le funzioni logaritmiche, $f(x) = \log_K(x)$ hanno $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,non sono definite per $x \leq 0$ ed hanno $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$. Entrambi questi limiti cambiano di segno se invece è $0 < K < 1$.
- Le funzioni trigonometriche, sempre periodiche, non hanno limite a infinito.
- Se $\lim f(x) = \infty$,allora $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$ e viceversa.

Molte delle osservazioni fatte per i limiti a infinito si possono facilmente adattare anche ai limiti per x che tende a una costante c.

Infinitesimi

In modo del tutto analogo, una funzione che tende a zero si dice "*infinitesima*" (per x che tende a c, oppure per x che tende a infinito). Si noti che se $f(x)$ è un infinito, $\frac{1}{f(x)}$ è un infinitesimo e viceversa; quindi tutte le osservazioni fatte per gli infiniti si possono facilmente adattare agli infinitesimi. Ad esempio, anche in questo caso, può servire di confrontare due infinitesimi, diciamo f e g, per capire se uno dei due tende a zero più potentemente dell'altro; se la funzione risulante dal rapporto tra f e g ha limite zero, vuol dire che f prevale su g (nel senso che tende a zero più potentemente) e si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g; se il quoziente ha limite infinito, vuol dire che è g a prevalere su f; se il limite esiste ed è finito, ma diverso da zero, vuol dire che f e g sono due infinitesimi dello stesso ordine. Se infine il rapporto non ammette limite, si dice che i due infinitesimi non sono confrontabili tra loro.

Più in dettaglio, date due funzioni f e g, entrambe infinitesime, cioè ad esempio con:

$\lim_{x \to c} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to c} g(x) = 0$,

per confrontare f con g si studia la funzione quoziente, data da

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Si può allora verificare uno dei seguenti casi:

- se $\lim_{x \to c} q(x) = 0$, allora f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g;

Ad esempio, le due funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$ sono entrambe infinitesime per x che tende a zero; ma è facile vedere che il loro rapporto, $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{x} = x^2$ tende a zero per x che tende a zero. Quindi x^3 è un infinitesimo di ordine superiore a x. In generale, per x che tende a zero, se $n > m$, allora x^n è un infinitesimo di ordine superiore a x^m..

- se $\lim_{x \to c} q(x) = \infty$, allora g è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a f, ovvero f è di ordine inferiore a g;

Ad esempio, le due funzioni, $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ sono entrambe infinitesime per x che tende a zero; ma il loro rapporto,

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ ha limite infinito per x che tende a zero. Quindi per x che tende a zero x^2 è un infinitesimo di ordine inferiore a x^3.

- se $\lim_{x \to c} q(x) = L \neq 0$, allora g ed f sono infinitesimi dello stesso ordine;

Ad esempio, le due funzioni, $f(x) = 4x^3 + 10x^2$ e $g(x) = x^2/100$ sono entrambe infinitesime per x che tende a zero; ma il loro rapporto,

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^3+10x^2}{x^2/100} = 400x + 1000$ per x che tende a zero ha limite finito, pari a 1000. Quindi queste due funzioni sono infinitesimi dello stesso ordine per x che tende a zero.

- se il $\lim_{x \to c} q(x)$ non esiste, allora fe $g$sono due infinitesimi non confrontabili.

Ad esempio, le due funzioni, $f(x) = x\ sen(1/x)$ e $g(x) = x$ sono entrambe infinitesimi per x che tende a zero; ma il loro rapporto,

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x sen(1/x)}{x} = sen(1/x)$ non ha limite per x che tende a zero. Quindi questii due infinitesimi non sono confrontabili.

B.7 Combinazione di funzioni con limiti infiniti o nulli

L'operazione di limite si comporta "abbastanza bene" rispetto alle operazioni aritmetiche anche in caso di infiniti e infinitesimi; ad esempio, si ha che:

se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$, allora: $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = +\infty$. Questa scrittura si abbrevia scrivendo che:

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Con lo stesso tipo di abbreviazione, vale che $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$. Per i casi "di contrasto", come $(+\infty) - (+\infty)$ oppure $(+\infty) + (-\infty)$, se uno dei due infiniti è di ordine superiore rispetto all'altro, allora prevale; se invece sono dello stesso ordine, va deciso caso per caso.

se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, allora: $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = \infty$, naturalmente rispettando la regola dei segni se ci sono i segni. Questa scrittura si abbrevia scrivendo che: $\infty \cdot \infty = \infty$,naturalmente coi segni giusti se ci sono. Per i casi "di contrasto", come $\frac{\infty}{\infty}$, se uno dei due infiniti è di ordine superiore rispetto all'altro, allora prevale; se invece sono dello stesso ordine, va deciso caso per caso.

In tutte queste operazioni, se uno solo dei due limiti è infinito, mentre l'altro è finito, allora quello finito si comporta come un infinito di ordine inferiore a qualunque altro. Se il limite è zero, ovvero la funzione è un infinitesimo, per comodità lo si può considerare come l'inverso di un limite infinito dello stesso ordine.

C. Funzioni continue tramite i limiti

Definito il concetto di limite, lo si può usare per precisare la nozione di funzione continua: una funzione si dice continua in un punto x_0, se in quel punto soddisfa queste tre condizioni:

- la funzione è definita; chiamiamo allora $M = f(x_0)$
- esiste il suo limite, finito, chiamiamo allora $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$
- il valore della funzione e del limite sono uguali, cioè $L = M$.

Si dice che una funzione è continua in un intervallo, se è continua in ogni punto di quell'intervallo. Se è continua in tutto il dominio di definizione, si dice semplicemente che è una funzione *continua*. Se è definita e continua per ogni valore di x si dice che è continua su tutta la retta.

Queste definizioni sono equivalenti a quelle date sopra con riferimento allo staccare la penna dal foglio, nel senso che individuano come continue o come non continue le stesse funzioni. Ma in aggiunta consentono di propagare, grazie alle proprietà dei limiti, la caratteristica di essere continua alle funzioni combinate mediante operazioni aritmetiche, e precisamente: se due funzioni sono continue, allora le funzioni date dalla loro somma, differenza, prodotto e (se esiste) quoziente sono continue; in altre parole, se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue (o continue in un punto, o in un intervallo), allora le funzioni:

$f(x) + g(x)$,
$f(x) - g(x)$,
$f(x) \cdot g(x)$,
e (dove $g(x) \neq 0$) $f(x)/g(x)$

sono continue (o continue in quel punto o in quell'intervallo). Inoltre, anche la loro composizione è continua, ovvero: se $f(x)$ è continua in x_0 e $g(y)$ è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $g(f(x))$ è continua in x_0 e se questo avviene per tutti gli x di un intervallo, allora $g(f(x))$ è continua in quell'intervallo.

Quindi, in pratica, le funzioni elementari sono continue in tutti i punti in cui sono definite.

La funzione usata sopra come esempio per introdurre il concetto di limite, $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$ non esiste per $x = 1$ ma per ogni $x \neq 1$ coincide con $h(x) = x + 2$ e può essere resa continua su tutta la retta aggiungendo alla sua definizione:

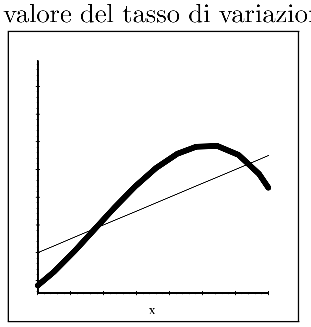
$f(1) = 3$. Discontinuità che possono essere eliminate in questo modo si chiamano *discontinuità rimuovibili.*

C.1 Teorema degli zeri

Le funzioni continue hanno una proprietà semplice ma importante, detta Teorema degli Zeri: se una funzione è continua in un intervallo, e se in due punti diversi di quell'intervallo, p e q, assume due valori discordi, cioè uno positivo e l'altro negativo, allora in qualche punto intermedio tra p e q assume il valore zero, cioè si annulla. Per convincersi, basta pensare che funzione continua significa poterne tracciare il grafico senza staccare la penna dal foglio; quindi per congiungere un punto sotto all'asse x con un punto sopra, bisogna attraversare l'asse x stesso. Questa proprietà risulta utile agli algoritmi di ricerca numerica della soluzione di equazioni: se la corrispondente funzione in due punti diversi ha valori discordi, allora in qualche punto intermedio deve avere valore zero.

IV. Derivate

Di una funzione, serve spesso conoscere, oltre al valore (e a volte anche più che il valore) la tendenza, ovvero la variazione, insomma il modo in cui il suo valore cambia al variare della variabile indipendente. Ad esempio, di una strada di montagna può interessare la pendenza; se una funzione $f(x)$ fornisce l'altitudine rispetto alla distanza, la variazione di f nell'intervallo che va da un determinato punto x_0 fino a un generico punto x (cioè la differenza $f(x) - f(x_0)$) rappresenta la differenza di quota tra i due punti. Il rapporto tra questa differenza e la distanza tra i due punti indica quanto è mediamente in salita la strada, in quel tratto. Questo quoziente, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si chiama *rapporto incrementale*, e rappresenta il *tasso medio di variazione* della funzione nell'intervallo da x_0 a x. Calcolando il rapporto su un tratto più breve, si otterrà un'indicazione più dettagliata dell'andamento della salita. Calcolando (se esiste) il limite del rapporto incrementale per x che tende a x_0,si otterrà la pendenza della strada nel punto x_0, ovvero il valore del tasso di variazione della funzione, in quel punto.



$f(x)$

Il valore di questo limite prende il nome di *derivata* della funzione in quel punto. L'insieme dei valori così ricavati per ogni punto definisce una nuova funzione, che si chiama appunto *funzione derivata* dalla f, o semplicemente *derivata* di f e si indica in uno dei seguenti modi: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $Df(x)$.

Calcolando il limite del rapporto incrementale per x che tende a x_0 per alcune funzioni semplici, si trova sempre che esso coincide col coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto:

- primo esempio: funzione lineare affine: $f(x) = mx + q$.
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{mx+q-mx_0-q}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{m(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} m = m$$
- secondo esempio: funzione quadratica $f(x) = ax^2$:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{ax^2-ax_0^2}{x-x_0} =$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{a(x^2-x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} a(x+x_0) = 2ax_0$$
- terzo esempio: funzione proporzionale inversa $f(x) = \frac{k}{x}$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k/x-k/x_0}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{kx_0-kx}{xx_0}\frac{1}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k(x_0-x)}{xx_0}\frac{1}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-k}{x_0^2} = \frac{-k}{x_0^2}.$$

Si confrontino questi risultati con quelli ottenuti sopra ricavando la funzione retta tangente ad una curva in un dato punto. Più in generale, (non diamo la dimostrazione, ma diciamo solo che è vero), *il valore della derivata di una funzione in un punto è pari al coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto*, retta che con la sua pendenza indica la pendenza della funzione in quel punto, ovvero il tasso di variazione della funzione in quel punto.

A. Derivate elementari

Gli esempi sviluppati qui sopra mostrano che per alcune funzioni semplici è facile ricavare la derivata di una funzione direttamente dalla definizione di derivata. Più in generale, per ricavare la derivata di una generica funzione elementare si usa tenere presente una piccola serie di derivate semplici e una piccola serie di regole di composizione. La seguente tabella riporta la derivata di alcune funzioni elementari.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

In particolare, la derivata di una funzione costante ($n = 0$) è zero, la derivata della funzione identità è 1. Per le funzioni trigonometriche queste derivate sono valide solo nell'ipotesi di misurare gli angoli in radianti.

B. Regole per derivate di funzioni combinate, composte e inverse

Grazie alle proprietà dei limiti, la derivata di una funzione ottenuta *combinando* più funzioni elementari mediante le comuni operazioni algebriche obbedisce alle seguenti regole:

- la derivata della *somma* di due funzioni è pari alla somma delle due derivate, come è facile verificare applicando direttamente la definizione di derivata; in altri termini: $(f + g)' = f' + g'$. Esempio: $(x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$

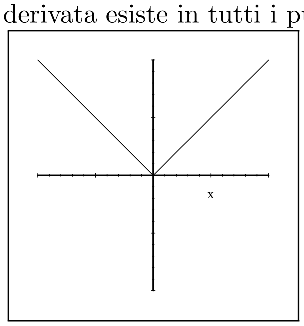
• dato una costante numerica k, la derivata di k moltiplicato una funzione è k moltiplicato la derivata della funzione, ovvero: $(kf)' = kf'$. Esempio: $(3x^4)' = 3(x^4)' = 12x^3$.
• la derivata del *prodotto* di due funzioni,f e g, è $f'g + fg'$. Ad esempio, la derivata di x^5, che sappiamo essere $5x^4$, se calcolata come derivata di $x^3 \cdot x^2$ viene: $(x^3 \cdot x^2)' = (x^3)' \cdot x^2 + x^3 \cdot (x^2)' = 3x^2x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$.
• la derivata del *quoziente* di due funzioni, f/g, è $\frac{f'g-fg'}{g^2}$.
Esempio: $\left((\frac{x^5}{x^2}) \right)' = \frac{5x^4x^2 - x^5 2x}{x^4} = 3x^2$.

Invece, riguardo alle funzioni composte (ovvero ottenute applicando una funzione al risultato di un'altra) e alle funzioni inverse si hanno le seguenti regole:
• derivata di una funzione *composta*: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Esempio: se $f(x) = x^2$ e $g(y) = \ln(y)$, allora $g \circ f = g(f(x)) = \ln(x^2)$ e la derivata è $\frac{1}{(x^2)} \cdot 2x = \frac{2}{x}$. Per altra via, si potrebbe osservare che $\ln(x^2)$ equivale a $2 \ln x$, per cui applicando la regola $(kf)' = kf'$ si arriverebbe allo stesso risultato.
• caso particolare, derivata della funzione *inversa*: se f è inversa di g, significa che $g(f(x)) = x$. Quindi $g(f(x))' = x' = 1$. Ma $g(f(x))$ è $g'(y) \cdot f'(x)$, quindi $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.
La seguente tabella riassume le regole di derivazione per le funzioni combinate.

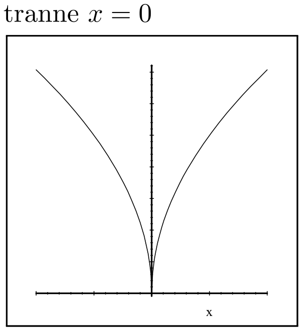
funzione	derivata
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$g \circ f(x)$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$

C. Esistenza della derivata

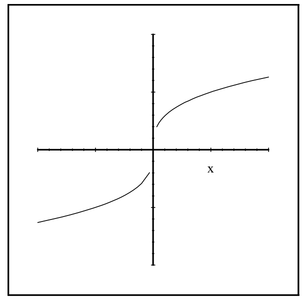
Non tutte le funzioni sono derivabili in tutti i punti: la derivata esiste solo se esiste (finito) il limite del rapporto incrementale. Un apposito teorema dell'analisi matematica assicura che se una funzione è derivabile in un punto, allora è continua in quel punto. La continuità è quindi necessaria ma non è sufficiente: occorre anche che in quel punto, il suo grafico sia "liscio", cioè che non abbia uno spigolo o una cuspide e che non abbia un flesso verticale, in modo che la sua retta tangente sia ben definita e non sia verticale. Le funzioni $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ (valore assoluto di x), $f(x) = \sqrt[4]{x^2}$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sono esempi di funzioni rispettivamente con spigolo, con cuspide e con flesso verticale. La loro derivata esiste in tutti i punti tranne $x = 0$



spigolo



cuspide



flesso verticale

Quindi, in pratica, le funzioni elementari, oltre ad essere continue in tutti i punti in cui sono definite, sono anche derivabili in *quasi* tutti i punti in cui sono definite.

D. Derivate di ordine superiore

La derivata di una funzione è una funzione, e in quanto tale può ammettere una derivata, la quale a sua volta può essere derivabile, ecc. Si chiamano derivate n-esime, o derivate di ordine n. La derivata seconda si indica con uno di questi simboli: f'', D^2f, $\frac{d^2f}{dx^2}$. E così via, per le derivate successive.

E. Andamento locale di una funzione

Di una funzione che descrive un fenomeno che si voglia studiare, può essere utile analizzare il comportamento, ovvero il suo andamento nei diversi intervalli di valore della variabile indipendente. In particolare, può essere utile capire: il campo di esistenza, ovvero in quali intervalli la funzione è definita; per quali valori la funzione è nulla, positiva o negativa in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente; in quali punti è stazionaria e se si tratta di punti di massimo, di minimo o di flesso; i limiti della funzione all'infinito e nei punti in cui eventualmente è discontinua o non definita; in quali intervalli la funzione è concava o convessa. Questa analisi si chiama *studio della funzione* ed è basato su informazioni fornite dalle derivate. Serve a ricavare elementi di conoscenza della funzione anche senza tracciarne il grafico o senza poter sapere se i grafici tracciati contengono le parti significative (si ricordi che il grafico è illimitato e se ne possono tracciare solo parti finite) o anche a tracciare parti del grafico stesso, se non già ottenute ad esempio al computer. Data la carenza di spazio e la facile disponibilità di grafici, queste tecniche non vengono qui dettagliate ma soltanto si accenna ai criteri atti a riconoscere le caratteristiche generali di una data funzione.

E.1 Premessa: campo di esistenza

Le funzioni elementari sono definite per tutti i valori della variabile indipendente a cui sono applicabili gli operatori usati. I casi notevoli di non esistenza sono:
• l'operatore di divisione non è definito per quoziente zero, quindi una funzione frazionaria non è definita nei punti in cui il denominatore sia nullo. Quindi, ad esempio: $y = \frac{1}{x^2-1}$ è definita per tutti i valori di x diversi da 1 e da -1, valori per i quali il denominatore vale zero. Per lo stesso motivo, la tangente trigonometrica non esiste nei punti in cui il coseno è nullo, cioè per $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$,ecc.

- L'operatore di radice quadrata non è definito per valori negativi, quindi ad esempio $y = \sqrt{2x-1}$esiste solo se $2x - 1 \geq 0$, cioè solo per $x \geq \frac{1}{2}$. Lo stesso vale naturalmente per la radice quarta e per tutte le radici di ordine pari. In particolare; come notato sopra, le funzioni potenza x^n, con n reale non razionale o razionale con denominatore pari, non sono definite per $x < 0$ se n è positivo, non sono definite per $x \leq 0$ se n è negativo.
- Le funzioni trigonometriche di seno e coseno hanno valori compresi tra -1 e +1, quindi le loro inverse sono definite solo in quell'intervallo.

E.2 Punti in cui la funzione è nulla, positiva o negativa

I punti di zero di una funzione $f(x)$ sono le soluzioni (o radici) dell'equazione $f(x) = 0$. Come sappiamo, la soluzione è facile per via algebrica solo per casi abbastanza semplici, come i polinomi di primo o di secondo grado, o polinomi che sia possibile scomporre in essi.

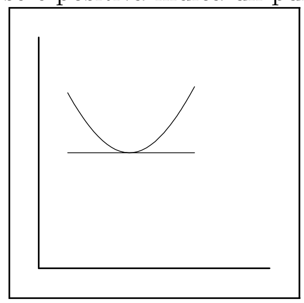
Se una funzione è ovunque continua e derivabile, per definire dove essa è positiva o negativa, conoscendo i suoi punti di zero si può ricorrere al valore della derivata in quei punti, per dedurre se la funzione in quei punti è decrescente (e quindi passa da positiva a negativa) o invece è crescente.

Attenzione: se la funzione fosse non definita o non continua in qualche punto dell'intervallo in esame, questo procedimento non funzionerebbe. Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ non ha punti di zero, eppure è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$.Infatti questa funzione non è definita nel punto $x = 1$.

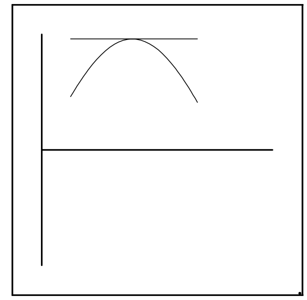
Se in un punto di zero anche la derivata è nulla, significa che quel punto è un punto stazionario. In questo caso, occorre verificare di che punto stazionario si tratta, procedendo come specificato più avanti. Se è un massimo, nel suo intorno la funzione sarà negativa; se è un minimo, nel suo intorno la funzione sarà positiva; se è un punto di flesso orizzontale, la funzione vi cambia di segno.

E.3 Intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente, punti stazionari

Data una funzione f, la sua derivata, f', per come è costruita, è positiva nei punti in cui la f è crescente (o semplicemente *cresce*), è negativa dove f decresce. Nei punti in cui f' è zero, la tangente al grafico di f è orizzontale e quindi in quei punti f non cresce e non decresce. Questi punti si dicono *punti stazionari* e in essi f può avere un massimo locale, oppure un minimo locale, come mostrato nei due grafici seguenti, oppure può essere costante, o infine può avere un flesso orizzontale, come spiegato poco più avanti. Un punto p si riconosce come punto di massimo perché in esso f' passa da positiva a negativa, e viceversa per il minimo (da negativa a positiva)[32]. In molti casi, si può ottenere la stessa informazione ricorrendo alla derivata seconda, che se è negativa indica un punto di massimo[33], e se è positiva indica un punto di minimo.



minimo locale



massimo locale

E.4 Limiti e teorema di De l'Hospital

Quando la funzione in studio è continua, i limiti nei punti stazionari coincidono col valore della funzione negli stessi punti. Per i limiti a infinito o nei punti singolari possono essere utili le indicazioni date riguardo a infiniti e infinitesimi. Inoltre, il teorema di De l'Hospital offre la posssibilità di calcolare facilmente alcune forme indeterminate che risultano dal rapporto tra due infiniti o tra due infinitesimi. Questo teorema stabilisce che se due funzioni derivabili f e g sono entrambe infinitesime, cioè tendono entrambe a zero per x che tende a un certo c (oppure che tende a infinito), allora il limite del loro rapporto coincide col limite del rapporto delle loro derivate. Ad esempio, le due funzioni x e $\sin x$ sono entrambe infinitesime, ovvero tendono entrambe a zero per x che tende a zero, e non è facile calcolare il limite del loro rapporto. Applicando il teorema di De l'Hospital, si può calcolare questo limite come limite del rapporto delle derivate[34]:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{D(\sin x)}{D(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Altro esempio, con applicazione ripetuta della stessa proprietà::

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0 + \sin x}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

Allo stesso modo, se due funzioni derivabili f e g sono entrambe infinite, cioè tendono entrambe a infinito per x che tende a un certo c (oppure che tende a infinito), allora il limite del loro rapporto coincide col limite del rapporto delle loro derivate.

Non è detto che questa sostituzione semplifichi sempre il calcolo, bisogna giudicare caso per caso.

E.5 Riconoscere concavità e convessità

Dove la funzione è concava, la sua derivata è decrescente, e quindi la sua derivata seconda è negativa.Allo stesso modo, dove la funzione è convessa, la sua derivata è crescente, e quindi la sua derivata seconda è positiva. Ricordando che si chiama *punto di flesso* un punto in cui la funzione cambia di convessità, si intuisce che in un punto di flesso la derivata seconda, se esiste, è zero; il viceversa purtroppo non è sempre vero[35]: per essere sicuri che sia un

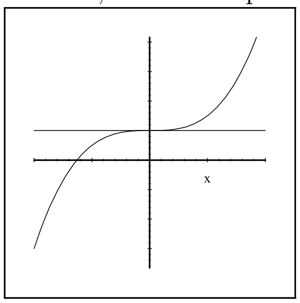
[32] Questo criterio è valido anche nei casi in cui la f, pur essendo continua, non sia derivabile in p

[33] Infatti, se p è un punto di massimo, allora la f dapprima cresce e poi decresce, quindi la f' dapprima è positiva e poi è negativa, il che significa che f' è decrescente, e quindi la sua derivata, f'', è negativa.

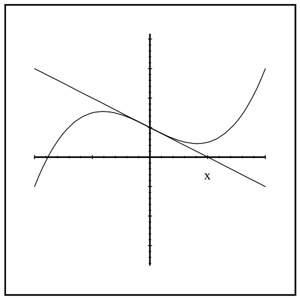
[34] In realtà è necessario conoscere il valore del limite in questione già per ricavare la derivata del $\sin x$; quindi a rigore, questo esempio di applicazione del teorema sarebbe improprio. Tuttavia qui l'attenzione è alla logica d'uso di alcuni strumenti matematici e non necessariamente alla loro genesi.

[35] Ad esempio, basta vedere $f(x) = x^4$, che in $x = 0$ ha $f'' = 0$ ma non ha un flesso.

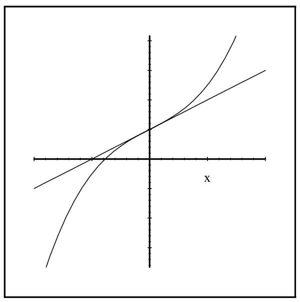
flesso, bisogna verificare che f'' oltre ad annullarsi in p,vi cambi di segno[36]. Un flesso si dice *orizzontale* se in quel punto anche la derivata prima è nulla; se la derivata prima esiste ed è diversa da zero, il flesso è *obliquo.* Se il flesso è verticale, la derivata prima non esiste.



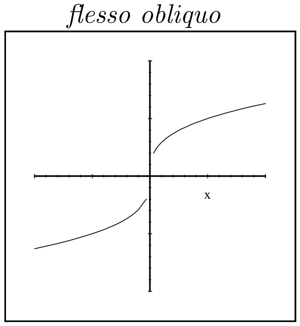
flesso orizzontale



flesso obliquo



flesso obliquo



flesso verticale

V. Integrale indefinito

Questo capitoletto introduce il concetto di integrale indefinito, necessario per procedere allo studio degli integrali definiti, introdotti nel prossimo capitolo.

Come da una funzione $f(x)$ si ricava la sua derivata, $f'(x)$, così si può cercare un'altra funzione $F(x)$, la cui derivata risulti essere proprio $f(x)$; questa funzione, se esiste, si dice che è una *funzione primitiva* o *antiderivata* di $f(x)$. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, e C è una costante reale qualsiasi, allora anche $F(x) + C$ è una primitiva di $f(x)$ (basta osservare che $F(x)$ e $F(x)+C$ hanno la stessa derivata). Quindi data una funzione, la sua primitiva non è una sola funzione, ma una famiglia di funzioni, che differiscono tra loro per una costante. Questa famiglia di funzioni si chiama *integrale indefinito*[37] della funzione f rispetto alla variabile x e si indica con la scrittura: $\int f(x)dx$. Il segno $\int$ si chiama segno di integrale e indica appunto tale insieme delle primitive: $\int f(x)dx = F(x)+C$. Per brevità, spesso al posto della famiglia si indica quella componente che ha $C = 0$.

La ricerca della funzione primitiva si inizia utilizzando a ritroso quanto detto a proposito del calcolo della derivata. Intanto, la tabella che indicava la derivata di alcune funzioni elementari può essere riscritta a rovescio, nella forma seguente:

$f(x)$	$F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

Quindi, ad esempio: $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$ e $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$. Per verificare, basta ricavare la derivata.

Inoltre, anche alcune delle regole per ricavare le derivate si possono usare a ritroso. Ad esempio:

- se $(f+g)' = f' + g'$, vuol dire che $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Analogamente, $\int (Kf(x))dx = K \int (f(x))dx$

Quindi, ad esempio: $\int (7x^2 + x - \frac{2}{x})dx = 7 \int x^2 dx + \int x dx - 2 \int \frac{1}{x}dx = \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2\ln x + C$

- se $(fg)' = f'g + fg'$, ricavando la primitiva di entrambi i membri dell'uguaglianza si ottiene che $fg = \int (fg)' = \int f'g + \int fg'$, da cui: $\int f'g = fg - \int fg'$.

Questa formula può essere utile quando si cerchi la primitiva di una funzione che è il prodotto tra una funzione di cui si conosce la primitiva e un'altra funzione di cui si conosce la derivata. Ad esempio, volendo trovare una primitiva di $x \sin x$, si può porre $f' = \sin x$ (e quindi $f = -\cos x$) e $g = x$ (e quindi $g' = 1$). Viene allora: $\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$. Questa tecnica va sotto il nome di *integrale per parti.*

A. Esistenza della primitiva

Abbiamo visto che non tutte le funzioni ammettono una derivata in ogni punto. Cosa accade per le primitive? Quasi tutte le funzioni hanno una primitiva. Non solo tutte le funzioni continue, ma anche molte di quelle non continue, basta che abbiano un numero finito di punti di discontinuità, oppure che siano funzioni elementari. Una buona regola pratica, semplice ma dimostrata, è che tutte le funzioni di cui si può tracciare il grafico sono integrabili, cioè hanno una primitiva. Questo non significa che tale primitiva sia una funzione elementare né, in caso, che sia facile trovarla (al contrario, ricordiamo che la derivata di una funzione elementare, se esiste, è sempre una funzione elementare e si ricava applicando poche semplici regole). Le seguenti funzioni e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ sono noti esempi di funzioni elementari che non hanno primitive elementari; di altre non è facile capire se esiste o no una primitiva elementare. E, in caso che esista, se si riuscirà a trovarla. I metodi indicati sopra servono per le situazioni più semplici,

[36] cioè sia positiva alla sua destra e negativa alla sua sinistra, o viceversa. In generale, la derivata seconda uguale a zero (con cambiamento di segno) indica un flesso, anche quando la derivata prima sia diversa da zero: la tangente nel punto di flesso ha sempre pendenza pari alla derivata prima.

[37] per distinguerlo dall'integrale definito che viene introdotto nel prossimo capitolo

approfondire sarebbe molto lungo e faticoso, tanto che, in passato, solo matematici particolarmente esperti riuscivano a trovare primitive di funzioni complesse; oggi, sono molto piú bravi i computer, naturalmente con appositi programmi sofisticati.

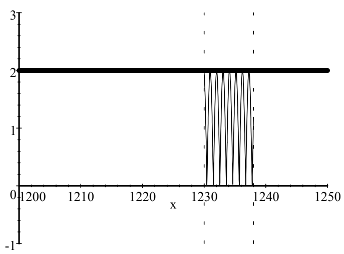
VI. Integrale definito

A. Area delimitata dalla funzione

In molte applicazioni è utile conoscere l'area compresa tra il grafico di una funzione e l'asse delle ascisse, limitatamente a un determinato intervallo. Infatti, essa rappresenta l'effetto totale della funzione in quell'intervallo. Quest'area si chiama *integrale definito* della funzione f sull'intervallo (A, B) e si indica cosí[38]: $\int_A^B f(x)dx$. Vediamo come calcolarlo, come al solito tramite esempi.

`Primo esempio`

Se una fontana eroga costantemente due litri al minuto, quanti litri ne escono tra le 12:30 e le 12:38? La funzione che descrive il flusso di acqua nel tempo (misurato in litri al minuto) è la funzione costante $f(t) = 2$ e il suo grafico è la retta parallela all'asse delle ascisse, t[39], ad altezza $y = 2$.

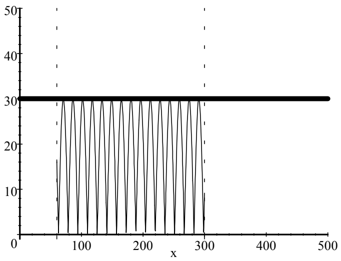


$f(t) = 2$

Nell'intervallo tra t_0 =12:30 e t_1 =12:38, saranno usciti litri $2 \cdot (t_1 - t_0)$, cioè $2{\cdot}8 = 16$ litri. E l'area racchiusa tra la funzione e l'asse delle ascisse, in quell'intervallo (area tratteggiata nella figura sopra), è proprio la misura della quantità di acqua erogata, infatti è l'area di un rettangolo i cui lati misurano l'intervallo di tempo $(t_1 - t_0)$ e il flusso f. Si noti che l'area si può scrivere come $2t_1 - 2t_0$ e che una primitiva di $f(t) = 2$ è $F(t) = 2t + c$,quindi l'area risulta pari a $F(t_1) - F(t_0)$, ovvero al valore di una primitiva di f in t_1 *meno* il valore della stessa in t_0.

`Secondo esempio`

La velocità è il rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato, cioè: $v = \frac{s}{t}$. Quindi lo spazio percorso a velocità costante è dato dal prodotto della velocità per il tempo, $s = v \cdot t$. Ad esempio, se un treno viaggia alla velocità costante di 30 metri al secondo, nell'intervallo di tempo tra le 13:01 e le 13:05, pari a 240 secondi, avrà percorso metri 30·240=7200, pari all'area del rettangolo tratteggiato nella figura sotto, dove il tempo è contato in secondi a partire dalle ore 13:00.



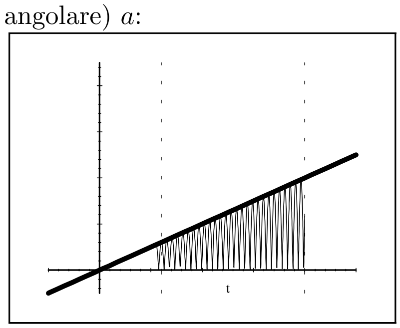
.

$v(t) = 30$

Più in generale, viaggiando a velocità costante $v(t) = k$, lo spazio percorso nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) è $s = k(t_1 - t_0)$,ovvero $s = kt_1 - kt_0$. Questa distanza è pari alla misura della superficie che sta sotto al grafico della funzione v, grafico che è la retta parallela all'asse delle ascisse, t, ad altezza k. Anche in questo caso, la primitiva della funzione v è: $V(t) = \int v(t)dt = kt + c$, e lo spazio percorso coincide proprio con $V(t_1) - V(t_0)$, ovvero il valore di una primitiva in t_1 meno il valore della stessa in t_0.

`Terzo esempio`

Se la velocità non è costante, ma varia linearmente nel tempo, la sua funzione sarà $v(t) = a \cdot t$, dove il parametro a rappresenta l'accelerazione, costante. Il grafico di $v(t)$ sarà la retta passante per l'origine e con pendenza (coefficiente angolare) a:



$v(t) = a \cdot t$

La primitiva della funzione $v(t) = at$ è: $V(t) = \frac{a}{2}t^2 + c$.

Anche in questo caso, si può calcolare lo spazio percorso in un intervallo di tempo $(t_1 - t_0)$ mediante l'area tra la funzione e l'asse delle ascisse; quest'area è un trapezio di basi $v(t_1)$ e $v(t_0)$ e di altezza $(t_1 - t_0)$. Quindi l'area è $\frac{(t_1-t_0)(v(t_1)+v(t_0))}{2}$,ovvero $\frac{(t_1-t_0)(at_1+at_0)}{2}$, cioè $\frac{a(t_1-t_0)(t_1+t_0)}{2}$, ovvero $\frac{a}{2}t_1^2 - \frac{a}{2}t_2^2$ e di nuovo coincide proprio con $V(t_1) - V(t_0)$, ovvero coincide con la differenza tra il valore di una primitiva di v in t_1 e il valore della stessa in t_0.

Ebbene, per quanto sorprendente possa sembrare, questa "coincidenza" è sempre vera[40]: l'integrale definito di una funzione f su un intervallo è sempre pari alla differenza dei valori di una sua primitiva F agli estremi dell'intervallo stesso. In simboli, se f è una funzione integrabile su (A, B), ed F è una sua primitiva, allora:

[38] Il segno di integrale, $\int$, deriva da una lettera S stilizzata, poiché la superficie in questione viene calcolata come somma di infinite piccolissime strisce verticali.

[39] Spesso l'asse delle ascisse è chiamato genericamente asse x, ma quando si sa a quale grandezza corrisponde è più chiaro chiamarlo col nome di quella grandezza, in questo caso il tempo.

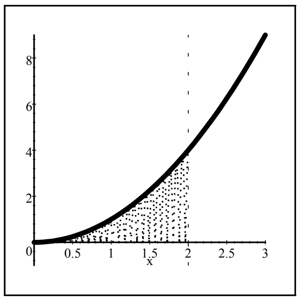
[40] Naturalmente non si tratta davvero di una coincidenza: è un teorema fondamentale del calcolo integrale. Ma qui basta sapere che è vero sempre.

$\int_A^B f(x)dx = F(B) - F(A)$. Normalmente $F(B) - F(A)$ si scrive così: $[F(x)]_A^B$. Il tutto si legge così: l'integrale definito di f tra A e B è pari alla differenza tra $F(B)$ e $F(A)$, ovvero a $F(x)$ calcolata tra A e B.

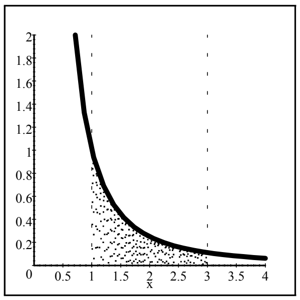
Con questa proprietà è facile calcolare aree anche di forma insolita, se si trova una primitiva della funzione che le individua.

Esempi: $\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

$$\int_1^3 1/x^2 dx = -\left[1/x\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{2}{3}$$



$f(x) = x^2$



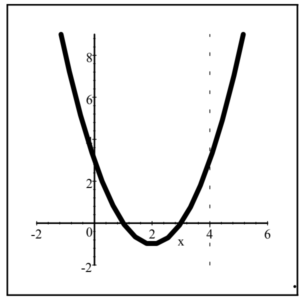
$f(x) = 1/x^2$

Le superfici che si trovano sotto all'asse x sono considerate con segno negativo, ovvero contribuiscono a diminuire anziché ad aumentare il risultato totale. Un esempio di questo viene dato tra poche righe.

B. Proprietà degli integrali definiti

Le seguenti proprietà sono intuitive se si tiene conto che l'integrale definito misura l'area tra il grafico della funzione e l'asse x, e che ogni sua parte contribuisce col suo segno, negativo se sotto all'asse x, positivo se sopra. Individuati sulla retta x due punti A e B, con $B > A$ (cioè B a destra di A), se f e g sono due funzioni definite e continue nell'intervallo (A, B), si ha che:

1. se C è un punto compreso tra A e B, allora $\int_A^B f(x)dx = \int_A^C f(x)dx + \int_C^B f(x)dx$
2. $\int_A^B (f(x) + g(x))dx = \int_A^B f(x)dx + \int_A^B g(x)dx$
3. se k è un qualunque numero reale, allora $\int_A^B kf(x)dx = k\int_A^B f(x)dx$
4. Queste ultime due costituiscono insieme la proprietà di *linearità*, che si esprime così: se h e k sono numeri reali, allora:
$\int_A^B (hf(x) + kg(x))dx = h\int_A^B f(x)dx + k\int_A^B g(x)dx$.
Ad esempio:
$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3)dx = \int_0^4 x^2 dx - 4\int_0^4 xdx + 3\int_0^4 1dx =$
$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + 3\left[x\right]_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{64}{2} + 12 = \frac{4}{3}$



$f(x) = x^2 - 4x + 3$

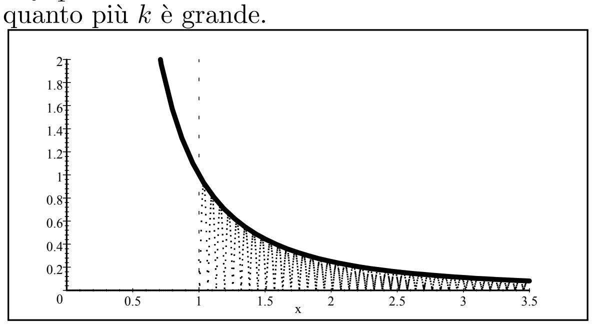
La superficie compresa tra $x = 1$ e $x = 3$ si trova sotto all'asse delle ascisse e quindi contribuisce in negativo al risultato totale; infatti, calcolando solo quella si ottiene:
$\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + 3\left[x\right]_1^3 =$
$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} - 4\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + 3(3 - 1) = -\frac{4}{3}$

5. (monotonia): se $f(x) \geq g(x)$ per ogni x compreso nell'intervallo (A, B), allora:
$\int_A^B f(x)dx \geq \int_A^B g(x)dx$
caso particolare: se $f(x) \geq 0$ per ogni x compreso nell'intervallo (A, B), allora:
$\int_A^B f(x)dx \geq 0$
6. Il valore assoluto dell'integrale definito di una funzione è minore o uguale all'integrale definito del valore assoluto della stessa funzione sullo stesso intervallo:
$\left|\int_A^B f(x)dx\right| \leq \int_A^B |f(x)|\, dx$.

C. Integrali generalizzati

C.1 Integrale generalizzato su una semiretta di una funzione che tende a zero

Come visto sopra, calcolando $\int_1^3 1/x^2 dx = -\left[1/x\right]_1^3$ si ottiene $\frac{2}{3}$, ovvero $1 - \frac{1}{3}$. Per un generico $k > 1$, si ha: $\int_1^k 1/x^2 dx = 1 - \frac{1}{k}$, valore che è tanto più vicino a 1, quanto più k è grande.



$f(x) = 1/x^2$

Anzi, il risutato tende a uno per k che tende a $+\infty$. In generale, quando un tale limite esiste ed è finito, si definisce:

$$\int_A^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_A^k f(x)dx.$$

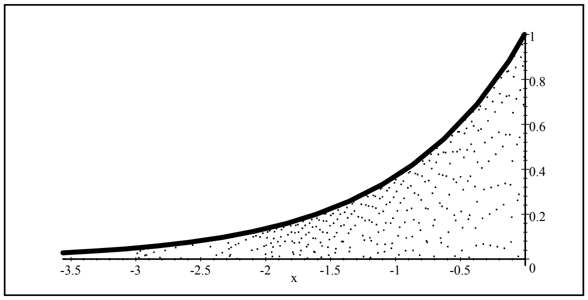
Analogamente, si definisce:

$$\int_{-\infty}^A f(x)dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^A f(x)dx.$$

Integrali definiti di questo tipo, calcolati su tutta una semiretta, si chiamano *integrali generalizzati.*

Alcuni esempi:

- $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{0} e^x dx = \lim_{k\to-\infty} [e^x]_k^0 = \lim_{k\to-\infty} e^0 - \lim_{k\to-\infty} e^k = 1 - 0 = 1.$



$f(x) = e^x$

- $\lim_{k\to+\infty} \int_{1}^{k} \frac{1}{x} dx = \lim_{k\to+\infty} [\ln x]_1^k = \lim_{k\to+\infty} (\ln k - \ln 1) = \lim_{k\to+\infty} (\ln k) = +\infty$, quindi l'integrale generalizzato $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ non esiste.
- per un qualsiasi numero reale $n \neq 1$, si ottiene: $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{1}^{k} x^{-n} dx = \lim_{k\to+\infty} \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n}\right]_1^k = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k^{1-n}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\right).$

Questo limite vale $+\infty$, se $n < 1$, e vale a $\frac{1}{n-1}$ se $n > 1$. Quindi, in totale l'integrale generalizzato: $\int_{1}^{+\infty} x^{-n} dx$ esiste solo se $n > 1$ e in questo caso vale $\frac{1}{n-1}$.

Il fatto che alcune funzioni ammettano integrale generalizzato si può interpretare dicendo che per queste funzioni la superficie compresa tra il grafico e l'asintoto orizzontale, misurata lungo tutta una semiretta, pur avendo lunghezza illimitata, ha un'area finita, che si riesce a calcolare.

C.2 Integrale generalizzato di una funzione che tende a infinito

Analogamente a sopra, data una funzione che tende a (più) infinito per x che tende ad un particolare valore A, si può cercare di capire se l'area compresa tra la funzione e il suo asintoto vericale, pur avendo altezza illimitata non sia in realtà finita e calcolabile. In pratica, data una $f(x)$ con $\lim_{x\to A^+} f(x) = +\infty$,se esiste finito il $\lim_{k\to A^+} \int_{k}^{B} f(x)dx$, allora si indica questo limite con $\int_{A}^{B} f(x)dx$ e anche in questo caso lo si chiama integrale generalizzato.

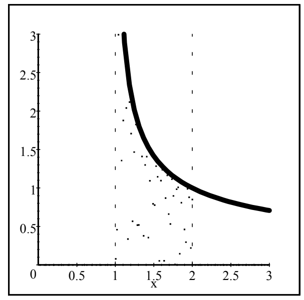
Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$ ha un asintoto verticale nel punto $x = 1$. Però il limite: $\lim_{k\to1^+} \int_k^B \frac{1}{\sqrt{(x-1)}} dx$ esiste ed è finito, infatti lo si può calcolare così:

$\lim_{k\to1^+} \int_k^B \frac{1}{\sqrt{(x-1)}} dx = \lim_{k\to1^+} \int_k^B (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx =$

$= \lim_{k\to1^+} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x-1)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_k^B =$

$= \lim_{k\to1^+} \left[2\sqrt{x-1}\right]_k^b = 2\sqrt{B-1}.$

Quindi l'area che sta tra la funzione e il suo asintoto verticale, ad esempio a sinistra del punto $x = 2$ (cioè per $B = 2$) misura 2.

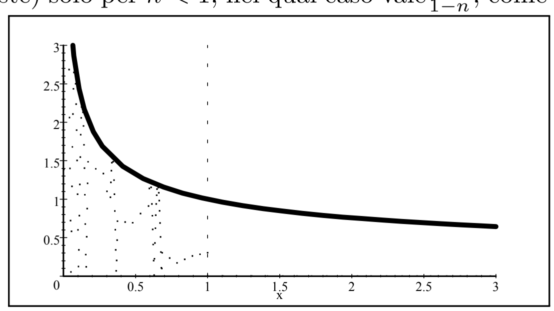


$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$

Più in generale, considerando per semplicità funzioni del tipo $f(x) = x^{-n}$, con $n > 0$, si può condurre una discussione del tutto analoga a quella del paragrafo precedente, studiando stavolta l'area che sta tra la funzione e l'asse delle ordinate, suo asintoto verticale, ad esempio a sinistra del punto $x = 1$. Si trova che quest'area è finita solo se $n < 1$ e che in questi casi misura $\frac{1}{1-n}$. Calcoliamo infatti:

- per $n = 1$: $\lim_{k\to0^+} \int_{k}^{1} x^{-n} dx = \lim_{k\to0^+} \int_{k}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{k\to0^+} [\ln x]_k^1 = 0 - \lim_{k\to0^+} (\ln k) = +\infty$, quindi per $n = 1$ questo integrale generalizzato non esiste.
- per $n \neq 1$: $\lim_{k\to0^+} \int_{k}^{1} x^{-n} dx = \lim_{k\to0^+} \left[\frac{1}{-n+1} x^{-n+1}\right]_k^1 = \frac{1}{1-n} - \lim_{k\to0^+} \frac{1}{1-n} k^{1-n}.$

Quest'ultimo limite è finito (e quindi l'integrale generalizzato esiste) solo per $n < 1$, nel qual caso vale$\frac{1}{1-n}$, come già detto.



$f(x) = x^{-0.4} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

Confrontando questo risultato con le osservazioni precedenti, si vede che la generica funzione $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, con n numero reale positivo, per nessun valore di n ammette entrambi gli integrali generalizzati, cioè sia quello "in orizzontale" che quello "in verticale". Per $n > 1$, esiste solo il primo, per $0 < n < 1$ esiste solo il secondo, per $n = 1$ nessuno dei due.