Calcolare la derivata prima e la derivata seconda delle seguenti funzioni

1. $y = x^5(\frac{4}{x^2} - 1)$
2. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$
3. $y = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$
4. $y = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1}$
5. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$
6. $y = (x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2)(x + 1)$
7. $y = (x^4 + 2)(x + 1)$
8. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$
9. $y = x\sin(x)\cos(x)$
10. $y = x^2\sin(x)$
11. $y = \sin^2(x)$
12. $y = \frac{x\sin(x)}{x + 1}$
13. $y = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$
14. $y = x\sin(\frac{1}{x})$
15. $y = \frac{x\ln(x)}{x + 1}$
16. $y = x \cdot e^{-x^2}$
17. $y = x \cdot e^x$
18. $y = x \cdot e^{-x}$
19. $y = (x - 1) \cdot e^{-x}$
20. $y = \ln(x^3 + 2x)$
21. $y = \ln(e^{x+1})$
22. $y = \ln(\sin(x))$
23. $y = \ln(\sin(x^2))$

24. $y = \ln(\sin^2(x))$

25. $y = Log(\sin(x^2))$

Per ciascuna delle seguenti funzioni,

i. Indicare in quale dominio la funzione è definita
ii. Calcolare per quali valori la funzione è nulla
iii. Calcolare in quali intervalli la funzione è positiva o negativa
iv. Individuare i punti stazionari della funzione
v. Calcolare in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente
vi. Specificare la natura dei punti stazionari della funzione
vii. Indicare in quali intervalli la funzione è concava o convessa
viii. Calcolare il limite della funzione nei punti stazionari
ix. Calcolare il limite della funzione agli estremi del dominio di definizione.
x. Disegnare il grafico della funzione
xi. Ricavare l'antiderivata (o integrale indefinito)

26. $y = x^2(2 - x)$

27. $y = x^3(\frac{4}{x^2} - 1)$

28. $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$

29. $y = x^3(1 - \frac{1}{x^2})$

30. $y = x(4 - x^2)$

31. $y = x^2(x - \frac{1}{x})$

32. $y = x\sqrt{x}(\frac{4}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x})$

33. $y = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 4)}{x + 2}$

34. $y = \sqrt{x}(\frac{4x}{\sqrt{x}} - x^2\sqrt{x})$

35. $y = x(9 - x^2)$

36. $y = x^3(1 - \frac{1}{x^2})$

37. $y = x\sqrt{x}(\frac{9}{\sqrt{x}} - x\sqrt{x})$

38. $y = \frac{(x - 4)^2(2x^2 - 2)}{2x + 2}$

39. $y = x^2(x - 3)$

40. $y = \frac{x^3}{3} - x$

41. $g(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{x + 3}$

42. $g(x) = \frac{x^2(4 - x^2)}{x + 2}$

43. $y = x^{\frac{5}{2}}(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})$

44. $y = \frac{x^{3/2}(4 - x^2)}{\sqrt{x}}$

45. $f(x) = (1 - x)(x + 1)(x + 2)$

46. $y = \sqrt{x^5}(\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})$

Per ciascuna delle seguenti funzioni,

i. Calcolare per quali valori la funzione è nulla:. .. . .
ii. Individuare i punti stazionari della funzione
iii. Specificare la natura dei punti stazionari
iv. Calcolare il limite della funzione per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$
v. Ricavare l'integrale indefinito (o antiderivata)

47. $y = -\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}$
48. $g(x) = \frac{x^2(x^4 - 4)}{x^2 + 2}$
49. $y = -x^5 + 4x^3$
50. $g(x) = \frac{x^2(x^2 - 1)}{x + 1}$
51. $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$
52. $y = -x^5 + 4x^3$
53. $y = x^5 + 8x^2$
54. $y = 4x^2 - x^4$
55. $y = x^3(x^2 - 4)$

Esercizi sul calcolo di integrali

56. Calcolare $\int_1^3 \frac{(x-4)^2(2x^2-2)}{2x+2}$, ovvero: quanto vale l'integrale definito della funzione $y = \frac{(x-4)^2(2x^2-2)}{2x+2}$ calcolato tra 1 e 3?
57. Calcolare $\int_0^2 \sqrt{x}(\frac{4x}{\sqrt{x}} - x^2\sqrt{x})$, ovvero: quanto vale l'integrale definito della funzione $y = \sqrt{x}(\frac{4x}{\sqrt{x}} - x^2\sqrt{x})$ calcolato tra 0 e 2?
58. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x(9 - x^2)$ calcolato tra 0 e 4?
59. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x(4 - x^2) + 1$ calcolato tra -2 e 2?
60. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x^3(1 - \frac{1}{x^2})$ calcolato tra 0 e 6?
61. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = 4x - x^3$ calcolato tra uno e due?
62. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x^2(x - \frac{1}{x})$ calcolato tra 0 e 2?
63. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x^2(2 - x)$ calcolato tra 0 e 2?
64. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$ calcolato tra 0 e 2?
65. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = (x^2 + 1)(x - 2)$ calcolato tra 0 e 3?
66. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x(9 - x^2)$ calcolato tra 0 e 4?
67. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x \cdot e^{-x}$ calcolato tra 0 e +infinito?
68. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x \cdot e^{x}$ calcolato tra 0 e 1?
69. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = \cos(x)$ calcolato tra 0 e π?
70. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = \sin(2x)$ calcolato tra 0 e $\pi/2$?
71. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x + \sin(x)$ calcolato tra 0 e π?
72. Quanto vale l'integrale definito della funzione $y = \sin(x)\cos(x)$ calcolato tra 0 e $\pi/2$?

73. Calcolare $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2}$, ovvero: quanto vale l'integrale definito della funzione $y = x \cdot e^{-x^2}$ calcolato tra zero e +infinito

Esempi di esercizi svolti:

1. *Date le seguenti due funzioni:* $f(x) = x(9 - x^2)$ *e* $g(x) = x\sqrt{x}(\frac{9}{\sqrt{x}} - x\ \sqrt{x})$*, specificare in cosa le due funzioni differiscono e in quali punti o intervalli coincidono. Rispondere poi alle seguenti domande riguardo alla prima delle due funzioni:*
   - *i. Indicare in quale dominio la funzione è definita*
   - *ii. Calcolare per quali valori la funzione è nulla*
   - *iii. Calcolare in quali intervalli la funzione è positiva o negativa*
   - *iv. Individuare i punti stazionari della funzione*
   - *v. Calcolare in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente*
   - *vi. Specificare la natura dei punti stazionari della funzione*
   - *vii. Indicare in quali intervalli la funzione è concava o convessa*
   - *viii. Calcolare il limite della funzione nei punti stazionari*
   - *ix. Calcolare il limite della funzione agli estremi del dominio di definizione.*
   - *x. Disegnare il grafico della funzione*
   - *xi. Ricavare l'antiderivata (o integrale indefinito)*

La funzione f(x) è definita per ogni valore reale della variabile *x*. La funzione *g(x)* non è definita per x=0 (infatti non è definita la divisione per zero) e non è definita per x<0 (infatti non è definita la radice quadrata di un numero negativo); per ogni valore reale x>0, *g(x)* è definita e coincide con *f(x)*.

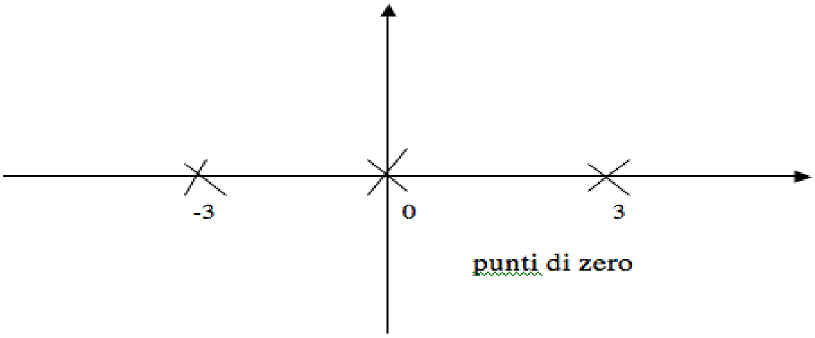
i. Indicare in quale dominio la funzione è definita

La funzione *f(x)* è definita per ogni valore reale di x.

ii. Calcolare per quali valori di x la funzione è nulla (ovvero i punti di zero)

$$x(9 - x^2) = 0 \;\to\; x = 0 \quad\text{oppure}\quad x^2 = 9 \;\to\; x = 3 \quad\text{oppure}\quad x = -3.$$

quindi i punti di zero sono: 0, 3 e –3

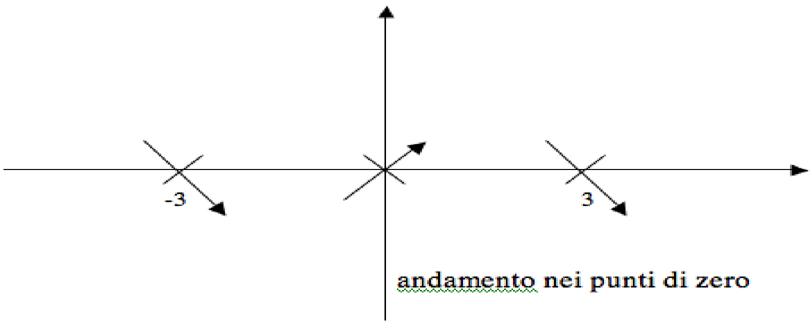


iii. Calcolare in quali intervalli la funzione è positiva o negativa

La funzione è continua su tutta la retta, quindi per il teorema degli zeri può cambiare di segno solo nei suoi tre punti di zero. In essi, passa da negativa a positiva se è crescente, viceversa se è decrescente. Per sapere se è crescente o decrescente, si può calcolare il valore della derivata in quei punti.

La derivata, è y'= $9 - 3x^2$ e in quei punti vale, rispettivamente:

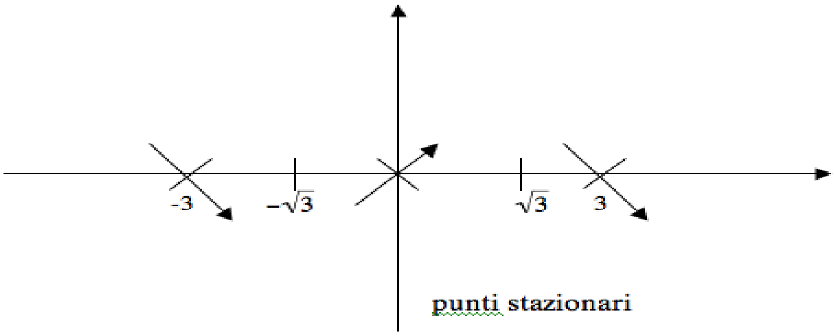
x	y'	
-3	-18	La derivata è negativa, quindi la funzione è decrescente e passa da positiva a negativa
0	9	La derivata è positiva, quindi la funzione è crescente e passa da negativa a positiva
3	-18	La derivata è negativa, quindi la funzione è decrescente e passa da positiva a negativa



Perciò la funzione è positiva per $x<-3$ e per $0<x<3$, negativa per $-3<x<0$ e per $x>3$.
(Alternativamente, si poteva notare che la funzione consiste nel prodotto tra le due funzioni $y=x$ e $y=9-x^2$ La prima ha lo stesso segno di x, la seconda è una parabola concava, positiva per $-3<x<3$ e negativa altrove. Combinando i segni delle due funzioni, si sarebbero ottenuti gli stessi risultati detti sopra.)

iv. Individuare i punti stazionari della funzione

La funzione ha punti stazionari dove la sua derivata si annulla. La derivata y'$=9-3x^2$ si annulla solo per $x^2=3$, ovvero per $x=-\sqrt{3}$ e per $x=\sqrt{3}$.



v. Calcolare in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente

La funzione y è crescente dove la sua derivata y'$=9-3x^2$ è positiva. La derivata y' è una funzione quadratica, ovvero del tipo ax^2+bx+c, con $a=-3$, quindi il suo grafico è una parabola concava ed ha valori positivi all'interno dell'intervallo tra i suoi punti di zero e negativi all'esterno. Quindi la funzione *f(x)* è crescente per $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ e decrescente sia per $x<-\sqrt{3}$ che per $x>\sqrt{3}$.

vi. Specificare la natura dei punti stazionari della funzione

La derivata seconda della funzione, è y'' $=-6x$ e nei due punti stazionari vale, rispettivamente:

x	y''	
$-\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	Derivata seconda positiva, quindi questo punto stazionario è un punto di minimo
$\sqrt{3}$	$-6\sqrt{3}$	Derivata seconda negativa, quindi questo punto stazionario è un punto di massimo

(Alternativamente, si poteva notare che nel primo punto stazionario la derivata passa da negativa a positiva, ovvero la funzione passa da decrescente a crescente e quindi ha un minimo. Viceversa per il secondo.)

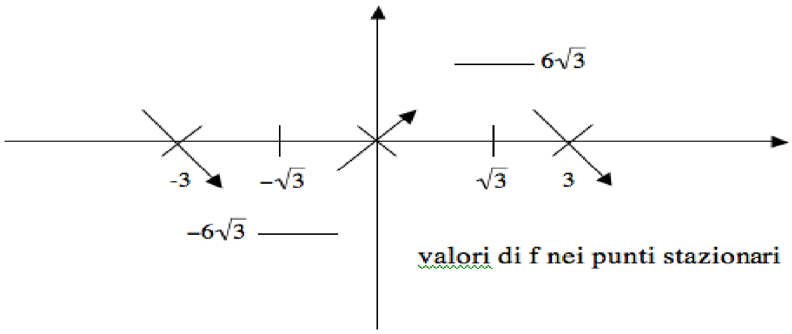
vii. Indicare in quali intervalli la funzione è concava o convessa

La funzione è concava dove la sua derivata seconda è negativa, convessa dove la sua derivata seconda è positiva. In questo caso, la derivata seconda $-6x$ è positiva per $x<0$ e negativa per $x>0$, quindi la funzione è convessa per $x<0$ e concava per $x>0$.

viii. Calcolare il limite della funzione nei punti stazionari

La funzione è ovunque continua quindi il limite coincide ovunque col valore della funzione, e specificamente:

x	f(x)
$-\sqrt{3}$	$f(-\sqrt{3})=9(-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})^3=-9\sqrt{3}+3\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$	$f(\sqrt{3})=9\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3=6\sqrt{3}$



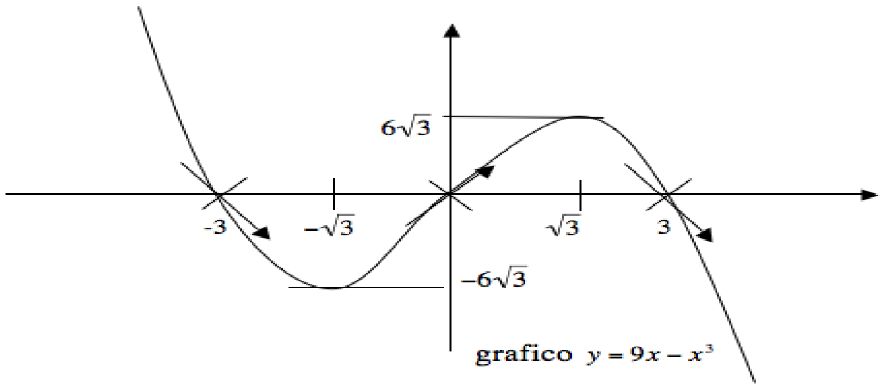
ix. *Calcolare il limite della funzione agli estremi del dominio di definizione.*

Il dominio di definizione di $y = 9x - x^3$ va da $-\infty$ a $+\infty$ ed entrambi i rispettivi limiti hanno la forma $\infty - \infty$. Poiché prevale l'infinito di ordine superiore, valgono i seguenti limiti:

x	limite
$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$

x. *Tracciare il grafico della funzione*

Dagli elementi fino qui definiti risulta che la funzione $y = 9x - x^3$ ha un grafico del tipo seguente.



xi. *Ricavare l'antiderivata (o integrale indefinito)*

$$\int x(9 - x^2)dx = \int 9x - x^3 dx = \int 9x dx - \int x^3 dx = 9\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}$$

2. *Calcolare*: $\int_0^2 (x^2 - 2)(2x - 1)$ *(integrale definito della funzione* $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$ *tra zero e due)*

La funzione è espressa come prodotto tra due binomi, conviene ricavare il polinomio risultante:

$$\int_0^2 (x^2 - 2)(2x - 1)dx = \int_0^2 (2x^3 - x^2 - 4x + 2)dx =$$

(l'integrale di una somma è pari alla somma degli integrali):

$$= 2\int_0^2 x^3 dx - \int_0^2 x^2 dx - 4\int_0^2 x \; dx + 2\int_0^2 dx =$$

$$= 2\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 4\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$